# MODELOS MENTALES SOBRE EL CONCEPTO DE MEDIDA

ANDREA MILENA OSORIO CARDENAS

2009

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MANIZALES

DEPARTAMENTO DE EDUCACION

Maestría en

Enseñanza de las ciencias

2007-2009

# MODELOS MENTALES SOBRE EL CONCEPTO DE MEDIDA

Presentada por

**Andrea Milena Osorio Cárdenas**

Dirigida por

**Mgr. Ligia Inés García Castro**

**A René, Salomé y Sebastián**

**por comprender mis ratos de ausencia y no dejarme de amar a pesar de ello.**

**A mis padres, hermanos, familiares por su apoyo incondicional.**

**A mis compañeros y estudiantes de formación complementaria por permitirme compartir con ellos la necesidad de ser educadores cada vez más profesionales.**

**A Ligia por sus valiosos aportes, y por guiarme en este nuevo y maravilloso mundo en el que me estoy involucrando.**

**A Oscar Eugenio Tamayo Álzate por su gran apoyo durante el proceso.**

## TABLA DE CONTENIDO


Introducción

| | | |
|---|---|---|
| 1.1. | Planteamiento del problema | 1 |
| 1.2. | Objetivos | 3 |
| 1.3. | Justificación | 4 |
| 2. | Referente conceptual | 5 |
| 2.1. | Antecedentes | 5 |
| 2.2. | Algunas reflexiones históricas y epistemológicas alrededor del concepto de medida | 9 |
| 2.3. | Aspectos psicológicos en la construcción de la medida | 17 |
| 2.4. | Los modelos mentales | 21 |
| 3. | Tipo de investigación | 24 |
| 3.1. | Introducción | 24 |
| 3.2. | Diseño metodológico | 25 |
| 3.3. | Técnicas e instrumentos | 27 |
| 3.4. | Plan de Análisis | 28 |
| 4. | Análisis de la información | 30 |
| 4.1. | Introducción | 30 |
| 4.2. | Modelos mentales emergentes: componentes y estructura | 32 |
| | | 105 |

4.3. Discusión de los resultados obtenidos

Conclusiones y recomendaciones 114

Bibliografía 121

Anexos

## Índice de Tablas


| | |
|---|---|
| Tabla 1: Aspectos epistemológicos de la medida | 10 |
| Tabla 2: Modelos explicativos sobre el concepto de medida | 12 |
| Tabla 3: Operacionalización de los instrumentos | 26 |
| Tabla 4: Caracterización de la unidad de trabajo | 31 |
| Tabla 5: Modelos explicativos P.1 | 33 |
| Tabla 6: Representaciones semióticas | 45 |
| Tabla 7: Modelos explicativos P.2 | 47 |
| Tabla 8: Representaciones semióticas | 57 |
| Tabla 9: Modelos explicativos P.3 | 59 |
| Tabla 10 : Modelos explicativos P.4 | 66 |
| Tabla 11: Representaciones semióticas | 74 |
| Tabla 12: Modelos explicativos P.5 | 75 |
| Tabla 13: Representaciones semióticas | 82 |
| Tabla 14: Modelos explicativos P.6 | 83 |

Tabla 15: Modelos explicativos P.7 91

Tabla 16 : Modelos explicativos P.8 98

## Índice de gráficas


Gráfica 1 : Sistemas de medidas 16

Gráfica 2: Elementos constituyentes de los modelos mentales 23

Gráfica 3: Plan de análisis 29

Gráficas 4: Relación de modelos explicativos P.1 36

Gráfica 5: Relación de modelos explicativos P.2 50

Gráfica 6: Relación de modelos explicativos P.3 63

Gráfica 7: Relación de modelos explicativos P.4 69

Gráfica 8 : Relación de modelos explicativos P.5 77

Gráfica 9: Relación de modelos explicativos P.6 85

Gráfica 10: Relación de modelos explicativos P.7 92

Gráfica 11: Relación de modelos explicativos P.8 99

# INTRODUCCION

El objetivo de esta investigación ha sido comprender la estructura de los modelos mentales sobre el concepto de medida que caracteriza a un grupo de estudiantes de segundo grado de básica primaria y de primer año de formación complementaria. En efecto, el interés es identificar los elementos que se dan en los modelos y analizar las posibles relaciones entre dichos elementos.

El informe de investigación se encuentra presentado en 7 apartes. La primera parte comprendida por los numerales 1, 2 y 3 , hacen referencia a la problemática que hizo surgir la pregunta de estudio, los objetivos propuesto para poder comprender el fenómeno y la justificación de dicha investigación.

En el numeral 4 se presentan los antecedentes y referentes teóricos que se tuvieron encuenta para el estudio y que permitieron comprender aspectos del fenómeno tratado.

El numeral 5 se exponen los elementos metodológicos que se tuvieron en cuenta para realizar el estudio, donde se específica el tipo de estudio, las técnicas, los instrumentos utilizados y el procedimiento a seguir.

En el penúltimo y último numeral se expresan lo hallazgos producto del análisis e interpretación de los mismos, allí se detallan los resultados de los objetivos propuestos.

## 1.1. Planteamiento del problema

En la actualidad los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son un campo de investigación de la Didáctica de las Matemáticas. Una de sus preocupaciones son los procesos de alfabetización matemática que conducirían a los ciudadanos a tomar decisiones pertinentes frente al mundo que les rodea, mientras que en la escuela sigue persistiendo en el paradigma instrumental.

De igual forma Bishop (1999), haciendo un diagnóstico a los procesos de enseñanza de las matemáticas, sostiene que su estado actual presenta algunas áreas de interés: el currículo dirigido al desarrollo de técnicas, el aprendizaje impersonal, la enseñanza basada en los textos, entre otras. El autor describe estas áreas donde se puede concluir que un currículo dirigido al desarrollo de técnicas no pueden ayudar a comprender, no puede desarrollar significados, no puede capacitar al alumno para que adopte una postura crítica dentro y fuera de las matemáticas.

En lo referido al aprendizaje impersonal, ignora totalmente los significados personales que todos hemos construimos por nuestra propia cuenta, y en consecuencia, despersonaliza los procesos de aprendizaje. La ausencia de dichos significados personales significa que, en realidad, en las aulas donde se enseña matemáticas no hay ninguna persona, solo hay un enseñante de matemáticas, varios alumnos, y por lo tanto la enseñanza es impersonal, que es caracterizada por la utilización dependiente de los libros de texto, lo cual permite inferir que el trabajo del enseñante transmitir contenido matemático, no enseñar matemáticas a personas.

Atendiendo a las anteriores reflexiones, el trabajo que se presenta se ubica en la segunda área que propone el autor: “el aprendizaje impersonal” y en uno de los procesos matemáticos, el de medir. Se sugiere el tema porque a pesar de los grandes esfuerzos que se han realizado alrededor de la enseñanza de las medidas (Brousseau 1991-1992; Chamorro 1991, 2001,2003; Godino, Batanero & Roa 2004); en la escuela aun siguen persistiendo los mismos obstáculos en el proceso de enseñanza y de aprendizaje (véase Brousseau, Chamorro, Godino Batanero & Roa), que en general, son los señalados por Bishop anteriormente.

Según Chamorro (2001), los deficientes procesos de enseñanza alrededor de la medida han provocado que cada día los estudiantes estén menos alfabetizados matemáticamente, provocando con ello que algunos utilicen las medidas más como un conjunto de técnicas, conversiones y algoritmos a seguir y no como un objeto matemático que les permitirá tomar decisiones y participar críticamente en situaciones de medida.

Los procesos de enseñanza alrededor de las matemáticas y en este caso el de las medidas se planifican sin tener en cuenta las concepciones alternativas, que tiene cada sujeto alrededor de dicho concepto. Hace más de veinte años viene tomando fuerza el conocimientos de las concepciones alternativas que los estudiantes tienen sobre los conceptos para poder estructurar los ambientes de aprendizaje, y a pesar de ello, podría decirse que de las múltiples investigaciones que surgieron durante los años 80 y 90 aun no tocan las puertas de la escuela.

Los estudios referidos a las concepciones alternativas, han sido insuficientes porque sólo indagan los elementos conceptuales que han construido los sujetos alrededor de determinados conceptos, es por esto que ante estas dificultades algunos autores han preferido aproximarse a la teoría de los modelos mentales de Johnson Laird (1983), ya que ellos son modelos

análogos estructurados del mundo, son con los que actuamos, los que tenemos en la mente, y además son enriquecidos con diferentes elementos, no sólo lo conceptual.

A pesar de la pertinencia de esta teoría, que permite realizar modelizaciones aproximadas de lo que piensan los sujetos alrededor de los diferentes fenómenos, existe en la actualidad una polisemia frente al concepto de modelo mental (Gutiérrez 2005), ya que para algunos hablar de modelos mentales es semejante a hablar de concepciones alternativas, conocimiento previo, modelos conceptuales. Dado lo anterior, podría decirse que uno de los elementos de los modelos mentales son los modelos conceptuales, pero también tienen elementos relacionados con el componente afectivo, el lenguaje y el contexto entre otros.

Aunque este constructo teórico no es claro aún en las investigaciones que se realizan (Gutiérrez 2005), se ha decidido para este trabajo aproximarse desde esta perspectiva teórica, que permite indagar por: ¿Cuál es la estructura de los modelos mentales que sobre el concepto de medida poseen los estudiantes de segundo grado y primer año de formación complementaria de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Sagrado Corazón de Aranzazu- Caldas?

Se pretende con esta investigación aproximarnos a lo que los estudiantes comprenden sobre el concepto de medir, la acción de medir que ponen en juego cuando están dando solución a situaciones de medida.

## 1.2. Objetivos

1.2.1 General:

- Comprender la estructura de los modelos mentales sobre el concepto de medida que caracterizan al grupo de estudiantes analizado.

1.2.1 Específicos:

- Identificar algunos componentes de los modelos mentales sobre el concepto de medida que poseen los estudiantes
- Analizar las posibles relaciones que se dan entre los componentes de los modelos mentales sobre el concepto de medida.
- Identificar posibles relaciones entre la estructura de los modelos mentales de los niños y los jóvenes

## 1.3. Justificación

La medida es el medio de control por excelencia que va a permitirle al individuo interpretar la realidad y criticarla a partir de datos. Esto hace que la medida sea un instrumento fundamental en relación con otras áreas del currículo, permitiendo tratamiento de ejes transversales (Chamorro P, 2003).

El conocimiento de la medida es esencial para que el individuo pueda interpretar el contexto donde interactúa, por lo tanto, es necesario examinar qué elementos han construido los estudiantes alrededor de ella, para diseñar mejores acciones en el aula de clase. Tal conocimiento les ofrecerá a los docentes y a los propios estudiantes detectar los obstáculos epistemológicos y didácticos que, presentan; el uso que se hace de este concepto en su contexto, y el uso del lenguaje matemático referido a la medida.

Para comprender lo que los estudiantes han construido sobre de la medida, se tomó como base la Teoría de los modelos mentales, ya que la teoría permite inferir cómo construye cada sujeto el concepto de la medida.

El estudio es pertinente para la Didáctica de la matemática, específicamente para la Psicología de la educación matemática, ya que aportará elementos para generar currículos diferentes y estrategias en el proceso de

enseñanza, en los procesos de evaluación, buscando con ello aprendizajes profundos del concepto de medida.

Esta investigación podría ser punto de partida para reorganizar el currículo en la institución a nivel de la enseñanza del sistema métrico y por consiguiente podría aportar a la reestructuración de los contenidos relativos al sistema métrico y su relación con los demás sistemas matemáticos.

# 2. Referente conceptual

Para el objeto de estudio de esta investigación es necesario realizar algunas aproximaciones tanto históricas como epistemológicas y cognitivas de la medida.

## 2.1. Antecedentes

Con el fin de comprender el fenómeno a investigar, se rastreó información alrededor de las dificultades en el aprendizaje y enseñanza de la medida donde se encontraron autores como Brousseau (1991,1992),Chamorro (1991,2001,2003), y desde el concepto de modelos mentales se encontraron autores que los han hecho desde las matemáticas Elichiribehety, Otero & Fanaro (2002), Otero y Banks-Leite (2006), también algunos autores de las ciencias experimentales: Moreira & Greca (1996, 1998), Moreira, Rodríguez & Marrero ( 2001), Tamayo (2002).

En cuanto a lo relacionado con el aprendizaje y la enseñanza de la medida, Brousseau (1991, 1992) en su artículo “el peso de un recipiente. Estudio de los problemas de la medición en CM”, concluye:

- La necesidad del dominio de los objetos matemáticos no se tiene en cuenta, ya que los alumnos están inmersos en situaciones y entornos institucionales en las que ni ellos, ni los maestros , pueden siempre fácilmente aprender o controlar el desfase con relación a las diferentes exigencias: conocimientos teóricos sabios, conocimientos escolares.

- Las relaciones entre el saber y lo concreto, entre la práctica y la teoría, no son tratadas como objetos de enseñanza ni explícitos, ni implícitos.
- Los alumnos siguen utilizando el modelo de medida natural sin plantearse ninguna cuestión, ni sobre el problema a resolver, ni sobre la estructura matemática construida, ni sobre las desviaciones que podrían subsistir por otras razones.

En los estudios realizados por Chamorro (1991, 2001, 2003), alrededor de tratamiento de la medida en la edad escolar, se exponen las dificultades de los alumnos y profesores frente a la medida y sostiene que las dificultades de los alumnos siguen siendo las mismas de una generación tras otra:

- Las prácticas escolares siguen siendo muy homogéneas, se centran en las actividades de tipo formal, dedicando mucho tiempo a solucionar problemas derivados de la escritura correcta de una medida y a las conversiones de unidades, en la que paradójicamente se encuentra mucha dificultad. Por el contrario, las actividades de estimación, aproximación de medidas, que serían de gran utilidad en la vida corriente, son las menos frecuentes.
- El aprendizaje de los instrumentos de medida se limita a la cinta métrica y la balanza, sin que ni siquiera haya un trabajo sistemático que permita asegurar que los alumnos comprendan el sentido de la graduación de estos instrumentos. En relación a la graduación ningún manual escolar se plantea un trabajo específico, de forma que se sobreentiende que su comprensión y lectura forman parte de un aprendizaje social que no está bajo la responsabilidad de la escuela.
- Incapacidad de los alumnos para distinguir magnitudes diferentes, por ejemplo, superficie y perímetro, masa y volumen, etc.

Estos aspectos permitieron comprender los diferentes obstáculos que se ha encontrado alrededor de la enseñanza de la medida; además de ello,

aportaron información para la elaboración de los instrumentos y el planteamiento de unas categorías iníciales, relacionadas con los elementos conceptuales de la medida como eran la unidad, la magnitud, la selección de instrumentos, entre otros.

Además de lo anterior, poder inferir que a pesar de las diferentes investigaciones realizadas, las prácticas de enseñanza alrededor de la medida y en general de las matemáticas, siguen apuntando a un modelo formal e instrumental de la misma, que atiende a la construcción de aprendizajes superficiales

En cuanto a los antecedentes alrededor de modelos mentales, estas investigaciones aportaron al estudio elementos relacionados con aspectos metodológicos, ya que los modelos mentales al ser representaciones internas del mundo que han construido los sujetos, es complejo de investigarlo.

En las investigaciones de Otero (2002, 2006) se utilizó la entrevista clínica que permitió analizar los modelos mentales; en la investigaciones realizadas por Moreira & Greca (1996, 1998), Moreira (2001) las técnicas que utilizaron para la recolección de la información fueron, en los diferentes casos, producciones y verbalizaciones de los estudiantes registradas en cuestionarios, esquemas, mapas y entrevistas no estructuradas. Estas investigaciones permitieron concluir que por la complejidad de la investigación, ya que su corte es de tipo cognitivo, es necesario registrar datos a través de filmaciones o grabaciones.

## 2.2. Algunas reflexiones históricas y epistemológicas alrededor del concepto de medida

Muchos se han preguntado: ¿en qué momento siente el hombre necesidad de medir?. De acuerdo con Kula (1999), en el momento en que sintió la necesidad de contar, ya que medir y contar son dos procesos que no se dan separados, pues estos procesos acompañan una historia llena de necesidad e inquietudes humanas basadas en el trabajo agrícola, en las transacciones, en las guerra, los repartos o el poder de unos sobre otros (Figueiras, 2002).

Para las culturas antiguas, la medida lleva inmerso muchas cualidades, porque ellos pretendían dar un valor muy suyo a cada objeto que medían. Cada cultura desde las más lejanas hasta las más cercanas soportan la medida como un constructo social y cultural. A continuación se ve reflejada dicha relación:

- Los tipos de problemas de repartición de herencia de los árabes, Figueiras (2002) comenta que cuando se encontraron esos escritos se decía que la solución era errada , porque su solución no estaba relacionada con las reglas de las matemáticas formales , pero después de muchos análisis, pudieron constatar que habían que conocer la cultura para poder comprender que era lo que sucedía en la solución de los mismos.
- Los Mayas (Salazar de León, 2005) construyeron calendarios muy precisos, que les permitió predecir eclipses. El interés de ellos por desarrollar esos sistemas de calendario era la admiración que sentían por los fenómenos naturales y su relación con los dioses; además, las bondades que tenían esos cambios en sus cultivos.
- En el resguardo indígena de Avirama-Colombia (Gutiérrez Penagos, 2006) y en el resguardo indígena de Macedonia en el Amazonas-Colombia (Parra 2003), se concluye que a pesar del involucramiento de las medidas occidentales en actualidad , aún guardan elementos culturales alrededor de la medida que les ha permitido movilizar profundos valores ligados a la vida comunitaria cuando se acepta como

parte de la comunidad y se reconoce su papel en la resolución de problemas.

Para hablar de lo que ha significado medir para las diferentes culturas, hay que remontarse a la edad antigua, para comprender los significados, las dificultades que ha tenido para consolidarse en lo que hoy día desde aspectos epistemológicos de las matemáticas significa medir. En el siguiente cuadro se pueden observar diversas definiciones de la medida desde diferentes puntos de vista: filosofía de las ciencias, sociología, etnomatemáticas y didáctica de las matemáticas.

| Especialidad | Autor | Definición de medida |
|---|---|---|
| Filósofos de la ciencia | Campbell (1956) | Es la atribución de números a propiedades, para representarlas |
| | Moulines y Diez( 1999) | Es asignar números a las cosas de modo que aquellos expresen ciertas propiedades que estas exhiben. |
| Sociología | Kula (1999) | Es la abstracción de una característica cuantitativa del objeto, sin tener en cuenta su calidad. Pero para la mentalidad primitiva la medida debe ser una cualitativa o por lo menos va muy íntimamente ligada a la calidad, por ello cada objeto debe ser medido con una medida diferente y ninguna de ellas es reducible a las demás. |
| Etnomatemáticas | Bishop(1999, 2005) | Se ocupa de comparar, ordenar y cuantificar cualidades que tienen valor e importancia. |
| Didáctica de las matemáticas | Godino, Batanero y Roa(2005) | Es asignar un código identificativo a las distintas modalidades o grados de una característica de un objeto o fenómeno perceptible, que puede variar de un objeto a otro o ser incidente en dos o más objetos.<br>Con esta descripción no sólo se tiene en cuenta la medida habitual de las características cuantitativas y continuas, sino que también se considera “medir” a asignar una categoría a rasgos cualitativos como el color, el grado de dolor, de placer, etc. Cada modalidad es un valor de la variable que representa el rasgo correspondiente. |

Tabla1. Aspectos epistemológicos de la medida

Las definiciones dadas desde la filosofía de las ciencias aportan aspectos epistemológicos que no tienen en cuenta el trasfondo social que tiene la medida; por el contrario los otros tres puntos de vista, asumen la medida como un constructo social y cultural.

En Kula (1979), se pueden abstraer varios modelos explicativos de la medición; Giere (1999, citado en Tamayo 2001) explica que los modelos son representaciones que se han hecho los sujetos de dicho fenómeno; por tanto, esa familia de modelos permite comprender que es lo que ha significado para el hombre la medición y su sistema de construcción.

Existen en el mundo modelos explicativos de la ciencias, los que construyen los científicos para abordar los fenómeno que investigan, pero también están los modelos explicativos de la gente del común que les permite comprender los mismos fenómenos. Tales modelos (los científicos y los no científicos) pueden ser no compatibles, porque de acuerdo con Márquez et al. (2004), los modelos explicativos de la ciencia suelen ser complejos, puesto que son sistémicos, dinámicos, permiten la mutlicausalidad y el multiefecto, el azar, la indeterminación; mientras que los modelos explicativos que construyen las personas del común suelen ser estáticos, aislados, se basan en la causalidad lineal y son muy deterministas.

Durante la historia han surgido modelos explicativos sobre la medida, que en algunos casos se aproximan al modelo explicativo aceptado por la comunidad científica y en otros dista mucho de su construcción. En el cuadro siguiente se presentan los diversos modelos explicativos que se evidencia durante la historia.

| MODELO EXPLICATIVO | APROXIMACION TEORICA |
|---|---|
| ANTROPOCENTRICO | En este se tienen ideas de algunos exponentes como Protágoras ( citado en Kula, 1979) “el hombre medida del universo”, ó “el mundo fue cortado a la medida del hombre”. Se puede ver como bajo este modelo, el hombre medía el mundo consigo mismo. Por ser el centro del universo donde se |

| | |
|---|---|
| | encontraba incorporado. |
| MITICO | En este moldeo se relaciona la medida con aspectos de carácter divino y fantasioso, que carecen de una realidad. Ejemplo de ello es no poder medir los niños cuando nacen porque se pueden quedar enanos , los árabes por ejemplo no cuentan constantemente los camellos por temor a que se desaparezca |
| RELIGIOSO | En esta comprensión de la medida se confunde con la estafa, es símbolo de la pérdida de la felicidad, proviene directamente del pecado original. Contar y Medir equivalen a Pecar. El mismo Kula (1999) lo dice en su libro en forma jocosa, el que invento las medidas fue Caín y hay pasajes bíblicos que hacen referencia a esa medida, o culturas donde se cree que si se mide las cosas recaerán sobre ellos las plagas más fuertes, es decir los castigos del gran Dios. |
| PODER | La medida es atributo de poder en todas las sociedades civilizadas, es símbolo de soberanía, de dominación. En la historia proporciona innumerables ejemplos de litigios entre ciudades y esto se originaba en la lucha por el derecho de establecer y controlar no solo las medidas, sino los reinos, ya que, entre dos regiones que estuvieran luchando por su soberanía, quien ganara ejercía su poderío imponiendo sus medidas, buscando con ellos la unificación. |
| JUSTICIA | Desde esta concepción eran partidarios los mercantiles, ganaderos y comerciantes, porque para ellos, la medida y el pesaje eran cosas normales, siempre que ambas fueran “justas”. Esta es una construcción social que permite analizar la medida no solo desde aspectos netamente epistemológicos, sino también sociales de la misma. |
| HEDONISTA | Este modelo surge con la tendencia de aplicar el cálculo hedonista; este tipo de medida se le atribuye a Jeremy Bentham (1748-1832) el cual proponía que a través de dicho cálculo se podían medir los placeres y los dolores. De esta forma, las buenas y las malas acciones y, consecuentemente, la buena y la mala legislación, podían ser evaluadas en términos de factores como intensidad, duración y extensión. |
| CUANTITATIVO | La medida es un proceso racional, obra de la mente humana, libre de prejuicios y tradiciones, buena para todos, es decir, la medida como símbolo de prosaica pedantería. En este tipo de modelo es donde cobra especial importancia el significado de medir expuesto por Campbell y Moulines & Diez. |

Tabla 2. Modelos explicativos sobre el concepto de medida

En los cinco primeros modelos expuestos, se puede ver como la medida, está sujetada, asociada al componente social, cultural y valoral. En el modelo hedonista se pretende medir las propiedades de los objetos que no son medibles; se puede decir que es un tipo de modelo racional donde todo se podía medir hasta los sucesos de los fenómenos sociales y el modelo cuantitativo atiende al modelo aceptado por la comunidad científica.

En el proceso de enseñanza se pretende presentar la medida desde el último modelo, olvidando la historia que ha pretendido su construcción, ya que se ve la medida como un proceso donde se aplican técnicas, instrumentos y reglas. Al respecto Kuhn (1996), señala que la medida en los libros de texto es vista como un proceso ahistórico, acabado y no como un proceso de desarrollo; también hace críticas a la visión de ver la medida como resultados neutrales y precisos que no pueden provocar confusión; esta seguridad se la otorga a la facilidad de asignar números a lo que se mide.

En la construcción de la medida también es necesario tener en cuenta la magnitud, ya que esta permite comprender y analizar que propiedades son medibles de los objetos o fenómenos.

A continuación se presentan las características que son necesarias para que un objeto pueda ser medible, Campbell (1956), Moulines & Diez (1999) y Godino Batanero & Roa (2005):

1. Identificar el conjunto de objetos sobre los que se abstrae el concepto de cantidad.
2. Definir la relación de equivalencia por medio de la cualidad común que nos interesa.
3. Estos dos pasos implica homogenizar el conjunto de los objetos, agrupándolos en clases de equivalencia, obteniendo como consecuencia el conjunto de las cantidades que será el conjunto cociente correspondiente.

4. Definir la suma de cantidades y estudiar sus propiedades.
5. Relación de ordenación y propiedades.
6. Definir la operación externa, producto por números
7. Clasificación de la magnitud: absoluta, relativa, escalar, vectorial, discreta, continua.

Godino, et al. (2005) sugieren que medir cantidades es esencial en el proceso de cuantificación de la realidad, proceso que se ve facilitado por la reducción de las cantidades a números, con los cuales podemos pensar como si se tratara con las cantidades originales. Este proceso de medir cantidades sugiere la utilización de unidades que serán el referente o término comparativo que permitirá cuantificar la cantidad.

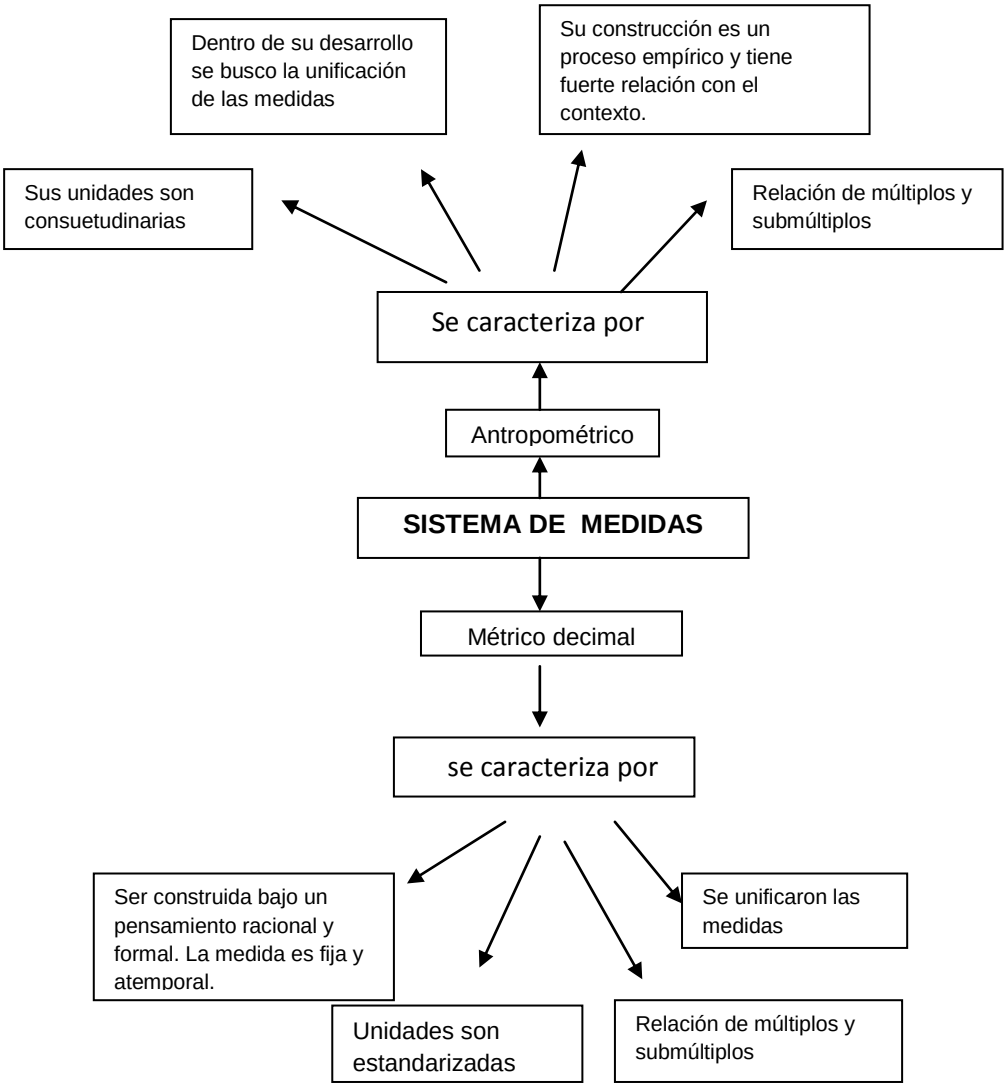
En la historia de las medidas, el hombre ha construido unidades para las diferentes magnitudes; hasta hace aproximadamente 250 años en las diversas comunidades existían unidades no estandarizadas que eran propias de cada región, estas unidades fueron el resultado de muchos años de abstracción alrededor de lo que era posible medir en los objetos y además que unidades utilizar para hacerlo.

En el inició las unidades no convencionales, no estandarizadas, o también llamadas unidad patrón, eran antropométricas, pero con el tiempo este sistema de unidades antropométrico se fué perfeccionando, provocando la construcción de un sistema de medidas que permitió la abstracción de “mi pie” al “pie”; este tipo de sistemas provocaba injusticias en las medidas y fué por ello que hace más de 200 años se construyó el sistema métrico decimal, pretendiéndose con él la unificación de la medidas en el universo y la perfección del mismo.

Por lo tanto, se puede concluir que el sistema de medidas ha tenido dos períodos en su construcción: uno el momento antropométrico, el otro es el sistema métrico decimal; Kula (1979) sostiene que si el hombre hubiera

sabido que el sistema métrico no iba a ser tan perfecto como se creyó inicialmente, no lo hubiera construido.

En la siguiente gráfica se pueden analizar algunas características que tiene cada uno de los sistemas.


Dentro de su desarrollo se busco la unificación de las medidas
Su construcción es un proceso empírico y tiene fuerte relación con el contexto.
Sus unidades son consuetudinarias
Relación de múltiplos y submúltiplos
Se caracteriza por
Antropométrico
SISTEMA DE MEDIDAS
Métrico decimal
se caracteriza por
Ser construida bajo un pensamiento racional y formal. La medida es fija y atemporal.
Se unificaron las medidas
Unidades son estandarizadas
Relación de múltiplos y submúltiplos

Gráfica 1. Sistemas de medidas

Durante el proceso de construcción de los sistemas, llámese antropométrico o métrico decimal, el hombre ha tenido fuertes desarrollos, es de aclarar que algunos han sido obstáculos para avanzar en la construcción:

- La clave para explicar las diversificaciones, no estriba en comprender el carácter convencional de las medidas, sino el significado de las medias de antaño, de esta manera se evidencia la trascendencia al desarrollo del trasfondo social, del cual está cargado las medidas.

- El proceso formativo de las nociones, costumbres metrológicas constituyen un componente del desarrollo de la concepción del mundo que adquiere el hombre, de la formación de los sistemas de clasificación y del surgimiento de las nociones abstractas.
- Desde el punto de vista cognitivo, el momento decisivo es la transición de las imágenes concretas a las nociones abstractas.
- Una de las desventajas de las medidas antropométricas era la falta de múltiplos y submúltiplos.
- Estás medidas un vez integradas en un sistema conmensurable, pudo cumplir todas las funciones intersubjetivas en las relaciones entre los hombres miembros de sociedades pequeñas.
- A pesar de la imperfección de las medias antropométricas, servían muy bien al hombre en su trabajo, permitiéndole satisfacer sus necesidades propias y construir obras de arte.
- La aplicación universal de medidas métricas, necesitará de una revolución mental previa, porque la creación de una medida requiere de una actividad mental muy complicada. Se basa en la elección abstracta de una de las características propias de unos de los objetos dados y la comparación de éstos en aquella.
- En todos los sistemas metrológicos, la medida se basa sobre alguna de las cualidades abstractas de los objetos medidos. olvidándose de todas las características de dicho objeto. Este es un proceso difícil, debido a que las medidas tradicionales están ligados a intereses vitales de los diferentes grupos humanos.

Se puede concluir entonces, que la construcción de un sistema de medida, no están sencillo como tener organizado todo el sistema ya dado, para ellos es necesario proceso cognitivos que lleven a abstraer las diferentes relaciones que se dan en la construcción de la misma. Es de enfatizar, lo difícil que fue para el hombre crear su propio sistema métrico, luego pasar a un sistema unificado, y luego pasar ese proceso que había construido lentamente durante su evolución a utilizar un sistema muerto, sin significado, donde también debe abstraer la cualidad medible del objeto, y escoger su unidad, y sus múltiplos y submúltiplos.

## 2.3. Aspectos psicológicos en la construcción de la medida

Brousseau (199, 1992) explica que el concepto de medida sólo ha sido esclarecido con gran dificultad y muy tardíamente en la historia de la humanidad, además sostiene que es un objeto complejo porque en su construcción pone en juego distintas nociones o entornos:

- Objetos Soporte
- La magnitud
- El valor particular de la magnitud
- La aplicación de la medida o medida función.
- La medida imagen ( asignación del número)
- La medida concreta.
- La medición
- La evaluación de las medidas o el orden de magnitud.

De otro lado el M.E.N (1998), propone que en el desarrollo de la medida es necesario desarrollar en los estudiantes algunos procesos y conceptos:

- La construcción de los conceptos de cada magnitud

- La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes
- La estimación de magnitudes
- La apreciación del rango de magnitudes
- La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos.
- La diferencia entre la unidad y el patrón de medición.
- La asignación numérica.
- El papel del trasfondo social de la medición.

Obsérvese que en lo propuesto tanto por Brousseau (199, 1992) como por el M.E.N(1998), para la construcción de la medida; subyace la necesidad de construir la magnitud, la unidad y el desarrollo de procesos de comparación y estimación básicos para la comprensión de la medida. De acuerdo con ello Chamorro (1991) propone que para la construcción de la magnitud es necesario considerar ciertas etapas:

- Consideración y percepción manual de una magnitud
- Conservación de una magnitud
- Ordenación respecto a una magnitud dada
- Establecer la relación entre la magnitud y el número.

La construcción de la magnitud se va construyendo paralelamente a la unidad (Chamorro Plaza, 1991), no indica esto que para medir se deba utilizar la unidad, ya que se puede utilizar procesos de comparación entre objetos, donde no sea necesario la asignación de los números.

En la construcción de la unidad Chamorro (1991) propone cinco pasos para la construcción de la misma:

- La ausencia de unidad: la medida es puramente visual y comparativa
- La unidad objetal: Es una unidad ligada únicamente a un solo objeto y claramente relacionada con lo que debe medirse.

- La unidad situacional: Unidad que depende todavía del objeto a medir, pero que cambia o puede cambiar de un objeto a otro.
- La unidad figural: La unidad va perdiendo toda relación con el objeto a medir, incluso en el orden a medir. Este tipo de unidad se va constituyendo en un verdadero sistema de unidades en cada magnitud.
- La unidad propiamente dicha: es el paso una unidad concreta a una unidad abstracta, es decir de una unidad intraobjeto a una unidad interobjeto.

Para el desarrollo de los dos elementos anteriores tanto magnitud como unidad, son necesarios diferentes procesos: la percepción, la conservación, la comparación, la estimación.

- La percepción: Sanmartí (2002) señala que la percepción es uno de los desencadenantes importantes en la construcción de conocimiento científico, ya que sin observación, sin manipulación, no hay posibilidad de aprender ciencia. Lo anterior permite concluir que la medición empieza con la percepción de lo que debe ser medido, ya que esta permite abstraer las cualidades que son susceptibles de ser medidas. Godino, Batanero y Roa (2003) suponen que este proceso se deja frecuentemente al azar y raramente se desarrolla de un modo sistemático, sugiriendo entonces que en la enseñanza de la medida se debería exponer a los niños muchos estímulos y muchas propiedades de los objetos que eventualmente deben medir.
- La conservación: Hace referencia a la invariancia de ciertos aspectos cruciales de una situación, ya que la apreciación de dicha invariancia es de vital importancia para el desarrollo de los procesos de medición. Se dice que una persona ha adquirido la capacidad de conservación sino se deja llevar por su percepción.
- La comparación: Este proceso permite que habiendo percibido una propiedad en un objeto, de modo natural se compare con otros objetos

que tienen la misma propiedad. Este proceso conduce a la necesidad de un estándar que podamos aplicar sucesivamente, es decir la construcción de sistemas de referencia.

- La estimación: “es el proceso de llegar a una medida sin la ayuda de instrumentos de medición, es un proceso mental, aunque frecuentemente hay aspectos visuales y manipulativos en él” (D. A. Grouws, 1992, citado en M.E.N 1998). Segovia, et al. (1989, citado en Segovia y Castro 2009), presentan una definición de la estimación en general como competencia necesaria para el desarrollo de las matemáticas, pero también hace distinción entre la estimación en lo numérico y la estimación en las medidas.

Para los autores citados con anterioridad, la estimación “es un juicio sobre el valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite. La estimación en medida para los mismos autores está referida a los juicios que pueden establecer sobre el valor de una determinada cantidad o bien la valoración que puede hacerse sobre el resultado de una medida.

La estimación tiene dadas unas características que fueron propuestas por Reys (1984, citado por Segovia y Castro, 2009) y completadas por Segovia, Castro, Rico y Castro (1989, citado por Segovia y Castro 2009):

- *Consiste en valorar una cantidad o el resultado de una operación aritmética.*
- *El sujeto que hace la valoración tiene alguna información referencia o experiencia sobre la situación que debe enjuiciar.*
- *La valoración se realiza por lo general de forma mental.*
- *Se hace con rapidez y empleando números lo más sencillos posibles.*
- *El valor asignado no es exacto, por sí adecuado para tomar decisiones.*

- *El valor asignado admite distintas aproximaciones dependiendo de quien realice la valoración*

En algunas ocasiones tiende a confundirse la estimación con la aproximación, ésta última da cuenta del valor ideal que se desea asignar. Una visión simplista de las matemáticas, hace ver la estimación como proceso exacto de la medida, es decir una forma correcta de hacer la medida.

## 2.4. Los modelos mentales

En esta investigación se utiliza la teoría de los modelos mentales propuesta por Johnson-Laird (1983, 1987, 2002), para tratar de comprender lo que han construido los estudiantes sobre la medida.

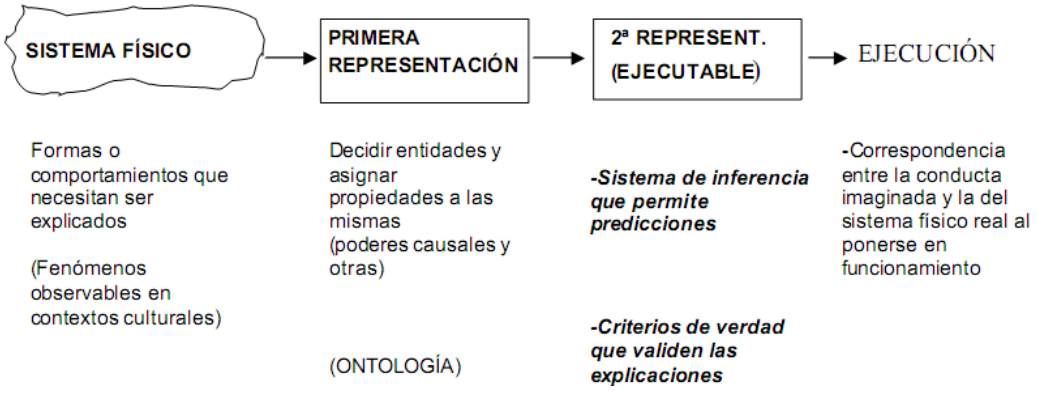
Sostiene que un modelo mental, es un estado de cosas que desempeña un papel representacional o análogo directo; su estructura refleja aspectos relevantes del estado de cosas correspondientes con el mundo. En la construcción de los modelos mentales influye la percepción visual, la comprensión del discurso, el razonamiento, la representación del conocimiento y la experticia (Tamayo A & Sanmartí, 2002) .

La función principal de los modelos mentales es que permiten comprender y explicar los estados de cosas con los que interactuamos continuamente, ellos poseen suficiente poder explicativo y predictivo como para que los sujetos puedan comprender esa interacción; el propósito de los modelos es facilitar al sujeto la comprensión del estado de cosas y anticipar su comportamiento.

De acuerdo con la teoría de los Modelos Mentales, estos poseen unos elementos constitutivos (citado en Gutiérrez 1994, 1998,2005 y Moreira 1998, 1999, 2001 y 2002):

1. Una primera representación del sistema físico o del estado de cosas que se quiere modelizar,
2. Una segunda representación, derivada de la primera, que dispone de un sistema de referencia que la capacita para la predicción de futuros estados del sistema.
3. La segunda representación tiene la propiedad de poder ajustarse mentalmente, de manera que se puedan comparar los comportamientos del sistema modelizado con los que tendría el sistema físico real, si se pusiera en funcionamiento.

A continuación se presenta una gráfica (Gutiérrez, 2005) donde se evidencia los elementos constituyentes del modelo:


SISTEMA FÍSICO
PRIMERA REPRESENTACIÓN
2ª REPRESENT. (EJECUTABLE)
EJECUCIÓN
Formas o comportamientos que necesitan ser explicados
(Fenómenos observables en contextos culturales)
Decidir entidades y asignar propiedades a las mismas (poderes causales y otras)
(ONTOLOGÍA)
-Sistema de inferencia que permite predicciones
-Criterios de verdad que validen las explicaciones
-Correspondencia entre la conducta imaginada y la del sistema físico real al ponerse en funcionamiento

Gráfica 2. Elementos constituyentes del modelo.

Vale la pena señalar que los modelos mentales se componen de elementos y relaciones que representan en manera análogo-estructural (Moreira 2002), porque como se mencionó anteriormente los modelos mentales son idénticos al estado de cosas, percibidas o concebidas, que los modelos representan, cada elemento y cada relación debe tener un papel simbólico.

Es importante señalar también que los modelos mentales poseen ciertas características que fueron señalas por Norman (1983, citado en Moreira 1998, 1999, 2001, 2002) y complementados por lo que propone Moreira (1998, 1999, 2001, 2002)

- Incompletos: no precisan ser técnicamente precisos, sino que deben ser funcionales.
- Evolucionan naturalmente
- Inestables: se olvidan detalles del sistema modelado
- No tienen fronteras bien definidas.
- Son no científicos
- Parsimoniosos
- Hay especificidad en su contenido
- Son recursivos
- Aplican el principio de economía: cada modelo mental es una representación del estado de cosas y recíprocamente cada representación analógica corresponde a un modelo mental.

Finalmente, se puede concluir que los modelos mentales permiten comprender y explicar los fenómenos del mundo y actuar de acuerdo con las predicciones resultantes.

# 3. Tipo de investigación

## 3.1. Introducción

El presente estudio pretende comprender la estructura de los modelos mentales sobre el concepto de medida que caracterizan a un grupo de estudiantes analizado, por lo tanto tiene una intencionalidad comprensiva propia de los estudios cualitativos.

Moreira (1996, 1998, 2001), expresa que cuando se indaga por los modelos mentales, la intención es explorar como los sujetos generan un modelo con base en sus representaciones que son internas, por tal motivo el ejercicio de análisis se hace a partir de la inferencia y del planteamiento de algunas explicaciones sobre cómo puede ser eso posible, sólo se trata de una aproximación.

De acuerdo con (Goetz & LeCompte, 1988) se parte de teoría previas que permiten definir algunas categorías iniciales del estudio, pero se deja emerger otras categorías que, en el estudio, dan cuenta de los modelos mentales que poseen los estudiantes en torno al concepto de medida.

Siguiendo a (Godino, 2003), este enfoque metodológico hace referencia a la complejidad del fenómeno que hace necesario un estudio holístico y de casos, así como de disponer de múltiples técnicas de recogida de datos, la especificidad respecto al saber matemático que hace posible la generación de hipótesis previas, a partir del estudio de dicho saber y de su génesis epistemológica, así como el uso de técnicas de análisis de datos cualitativos.

## 3.2. Diseño metodológico

Para comprender la estructura de los modelos mentales que poseen los estudiantes sobre el concepto de medida, se partió inicialmente de la construcción de un modelo teórico que daba cuenta de unas categorías iníciales de análisis que permitieron el diseño de un primer instrumento de recolección de información, que posteriormente llevo a la investigadora a elaborar nuevos instrumentos que permitieran contrastar la información.

La institución educativa donde se ha llevado a cabo la investigación es de carácter urbano-rural de la zona Norte del Departamento de Caldas-Colombia en un municipio llamado Aranzazu. Se trata de una institución pública de Enseñanza de Preescolar, Básica, Media y Formación complementaria que recibe alumnado proveniente de familias de nivel socioeconómico diferente y disperso (hijos de profesionales, agricultores, desempleados).

El contexto en el que se llevó a cabo la investigación, corresponde a condiciones naturales del aula, conformado por dos grupos de estudiantes, con las características que se aprecian en la siguiente tabla:

| PARTICIPANTES | EDAD | GENERO | GRADO |
|---|---|---|---|
| Participante 1 (P.1) | 7 años | Masculino | Segundo |
| Participante 2 (P.2) | 7 años | Masculino | Segundo |
| Participante 3 (P.3) | 7 años | Femenino | Segundo |
| Participante 4 (P.4) | 7 años | Femenino | Segundo |
| Participante 5 (P.5) | 17 años | Femenino | Primer año de formación complementaria |
| Participante 6 (P.6) | 17 años | Masculino | Primer año de formación |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | complementaria |
| Participante 7 (P.7) | 17 años | Femenino | Primer año de formación complementaria |
| Participante 8 (P.8) | 18 años | Masculino | Primer año de formación complementaria |

Tabla 3. Caracterización de la unidad de trabajo

La selección de la unidad de trabajo se realizó teniendo en cuenta, para el caso de los estudiantes de segundo grado, que el acercamiento a los conceptos relacionados con la medida era empírico pues dentro de la estructura curricular aún no se ha iniciado formalmente la enseñanza del sistema métrico. En cuanto a los estudiantes de ciclo complementario de formación como maestros, su intención era contrastar la información recogida con los niños y niñas de segundo grado. Es de aclarar que no se establecieron semejanzas y diferencias entre la estructura de los modelos mentales de los niños y los jóvenes.

La investigación pretende comprender la estructura de los modelos mentales que han construidos los niños y jóvenes, es decir, inferir de su discurso oral (en los niños de segundo grado),oral y escrito en los estudiantes de formación complementaria, así como las evidencias de los videos que permitieron dar cuenta de los contenidos procedimentales de los niños, niñas y jóvenes participantes en el estudio.

## 3.3. Técnicas e instrumentos

Las técnicas empleadas para la recolección de información fueron: entrevista semiestructurada y observación.

En cuanto a la entrevista semiestructurada, estaba compuesta por 6 situaciones de medida que pretendían analizar los componentes conceptuales y el contexto en el que se utiliza la medida (ver anexo 1 y 4). Para medir la validez y confiabilidad del instrumento se realizo una prueba piloto y la revisión de expertos.

En cuanto a la prueba piloto, se aplicó el instrumento a 8 estudiantes de segundo grado y primer año de formación complementaria, buscando con ello analizar las dificultades que podía poseer el instrumento, después de dicho pilotaje se reestructuró el instrumento, ya que se encontró que la prueba era muy extensa, siendo necesario dividir el instrumento en dos sesiones (instrumento 1, instrumento 4), sobre la revisión de expertos, el instrumento fue analizado por docentes del área de matemáticas con el fin de que se pudieran identificar algunas inconsistencia en las preguntas y poder medir la validez del mismo; al respecto, los expertos manifestaron conformidad con el instrumento pero reconocieron que era demasiado extensa y podría generar fatigabilidad en los participantes en el estudio.

Todas las sesiones de aplicación del instrumento fueron video grabadas, con el fin de registrar la mayor información posible y poder volver sobre el desempeño de los estudiantes cuantas veces fuera necesario y así reconstruir sus modelos mentales sobre el concepto de medida.

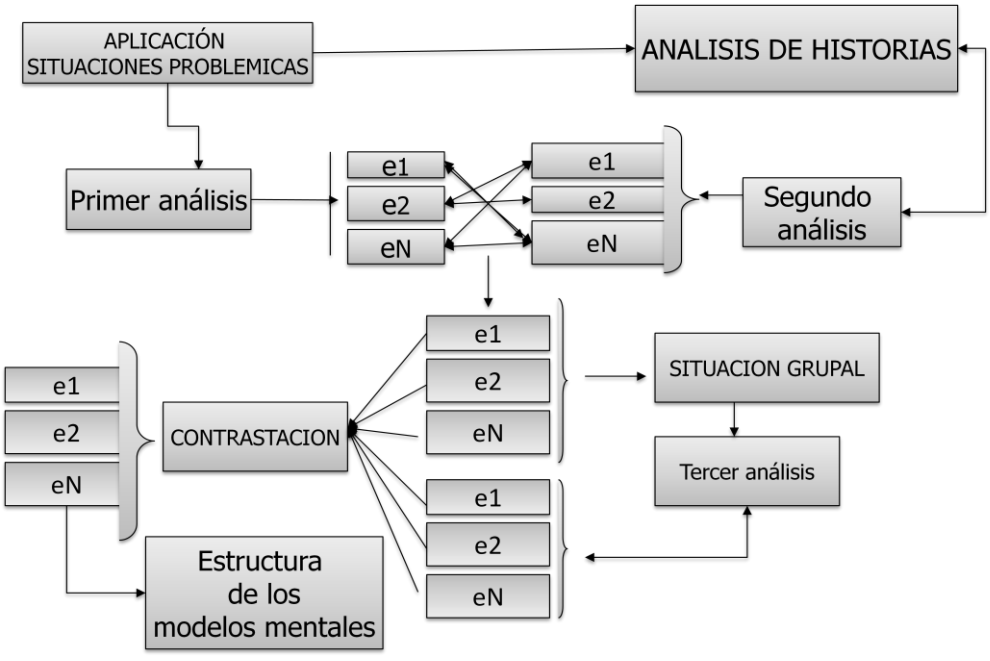
Las diversas categorías: modelos explicativos de la medida (en esta categoría se vincularon los elementos conceptuales de la medida), el contexto y las representaciones semióticas fueron los elementos finalmente

analizados en los registros. Las verbalizaciones y los protocolos fueron abordados desde el discurso, donde este nos permitía evidenciar los diferentes elementos que integraban en modelo y las diferentes relaciones.

### 3.4. Plan de análisis

En primera instancia se aplicó el instrumento 1 y de allí surgieron algunos elementos como los modelos explicativos; posteriormente se elaboraron dos instrumentos que pretendían ampliar la información recogida en el primer instrumento acerca de los modelos explicativos. Finalmente se elaboró un último instrumento que pretendía triangular la información recogida en el instrumento 1 y así poder saturar las categorías.

En el siguiente esquema se observa el plan de análisis:




Gráfica 3. Plan de análisis.

No se puede olvidar, que lo que se plantea es un trabajo de introspección, un proceso de interpretación de esas distintas verbalizaciones con la finalidad de extraer la explicaciones, para poder inferir cómo pueden haber operado mentalmente los participantes de la investigación; lo que se hace es interpretar, deducir, establecer inferencias sobre cómo creemos que cada uno de los participantes ha generado sus explicaciones y sus modelos mentales, qué elementos surgen , que relaciones se dan entre los diversos elementos.

# 4. Análisis de la información

## 4.1. Introducción

Las fuentes de datos utilizadas para la recogida de información están constituidas por las verbalizaciones y producciones hechas por los participantes que han sido registradas en filmaciones para su posterior análisis e interpretación. Estos registros son los siguientes:

- 6 situaciones de medida (Instrumento 1 y 4) donde se pretendía analizar la utilización de la magnitud, la unidad y los procesos de estimación, la selección del instrumento y el contexto.
- Planteamiento de unas situaciones hipotéticas alrededor de la medida, donde se pretendía analizar los modelos explicativos (Instrumentos 2a,3a, 2b,3b) : Justicia (J), Religioso(R), Mítico (M), Cuantitativo (C) que utilizan los estudiantes en el momento de dar solución a las situaciones:

| Instrumento | Instrumento 2 | | | | Instrumento 3 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Modelo explicativo | J | R | M | C | J | M | R | C |
| Estudiantes de segundo grado | 1,2,3 | 4 | 5,6 | | 1,2,3 | | | |
| Estudiantes de formación complementaria | 1,2,3 | 4,5,6 | 9,10 | 7,8 | 3,4,5,6 | 1 | 2 | |

Tabla 4. Operacionalización de los instrumentos

Los instrumentos 1, 2, 3 fueron aplicados en forma individual y el instrumento 4 en forma grupal. Con estos datos se obtuvieron 15 registros para los estudiantes de primaria y 21 registros para los estudiantes de formación complementaria, que constituyen las producciones y verbalizaciones que han servido de soporte para la posterior interpretación sobre los posibles modelos mentales sobre el concepto de medida, dichas interpretaciones se ejemplifican esos datos aportados con por los propios participantes.

La información recogida se analizó desde los modelos explicativos que utilizan los estudiantes durante la solución de las situaciones, el contexto y las representaciones semióticas, elementos que hacen parte de los modelos mentales que han construido los estudiantes alrededor de la medida.

- Los modelos explicativos hacen referencia a las múltiples concepciones que tiene los estudiantes alrededor de diversos fenómenos, y permitirán comprender que la estructura cognitiva de los estudiantes tienen distintos modelos explicativos, que pueden actuar de manera interdependiente frente las situaciones que se presentan (Tamayo Alzate, 2001). Los modelos explicativos que se han dado a través de la historia respecto de la medida, han sido: Mítico, Religioso, Poder, Justicia, Hedonista y Cuantitativo.
- El contexto permitió comprender la necesidad de involucrar a los estudiantes en situaciones reales para la enseñanza de la medida, ya que este impregna tanto los procesos culturales y sociales de la misma.
- Las representaciones semióticas, permiten comprender las construcciones que han realizado los estudiantes de dicho objeto matemático: la medida.

## 4.2. Modelos mentales emergentes: componentes y estructura

A continuación se analizan algunos de los elementos que fueron analizados de los modelos mentales sobre el concepto de medida que han construido los estudiantes y también sus posibles relaciones.

**Participante 1 (P.1)**

a. Modelos explicativos alrededor de la medida.

En este participante surgieron tres paradigmas que coexisten, puesto que se utilizan de acuerdo a las situaciones presentadas: modelo de justica , modelo hedonista y el modelo cuantitativo; se puede inferir de los datos que hay diferenciación entre el modelo de justicia y el modelo cuantitativo, entre el modelo hedonista y el modelo cuantitativo, y es posible que ello suceda, porque en los inicios de la historia de la medida, se daba mayor importancia a los aspectos cualitativos que aspectos cuantitativos, de igual manera sucedía con los elementos de justicia (Kula, 1999).

La tendencia de los modelos explicativos se puede visualizar en la siguiente tabla:

| Modelo explicativo | I 1 | | | | I 2 | | | | | | I 3 | | | I 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | C | | | | J | | | R | M | | J | | | H | |
| Nª Pregunta | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| Cuantitativo | x | x | x | x | | | | | | | | | | | |
| Justicia | | | | | x | x | x | | | | x | x | x | | |
| Mítico | | | | | | | | | | | | | | | |
| Religioso | | | | | | | | | | | | | | | |
| Hedonista | | | | | | | | | | | | | | x | x |

Tabla 5. Modelos explicativos P.1

En los protocolos surgen elementos donde se ve reflejado el interés de estudiante por actuar con “justa medida” (Kula, 1999), utilizando la expresión “igual para todos”; no hay que dejar perder de vista que la medida surge por la noción de igualdad socialmente aceptada (M.E.N, 1998). Aunque el interés de esta investigación no es analizar las diferentes concepciones de justicia, es necesario tenerlas en cuenta; ya que en las justificaciones del participante se observa dos concepciones de justicia: distributiva e igualdad.

Las siguientes frases extraídas de las transcripciones del pensamiento en voz alta del participante, refleja la justicia como la necesidad de igualdad:

> *“No, que coman todos iguales.*
>
> *Sí, porque ¿cómo les van a dar diferente plata? Entonces* ***tiene que repartir la misma plata****.*
>
> *Cuentan y la reparten* ***a todos la misma cantidad****.*
>
> *Porque si le dan más plata a ella, no alcanzaría para todos”.(P.1)*

De acuerdo con lo anterior se puede observar cómo permea el modelo de justicia, durante el proceso de medición, según el participante es necesario que se tenga en “cuenta a todos", en el momento de hacer reparticiones. En la historia la justicia igualitaria se fundamentaba bajo procesos de honestidad en el uso de las medidas y pesas, es decir la “medida justa”, se convierte en símbolo de justicia en general. Al participante realizar las diferentes acotaciones: *tiene que repartir la misma plata***,** *a toda la misma cantidad***,** *no alcanzaría para todos***,** sugiere inferir la medida justa para el desarrollo de la situación.

El P.1 también hace uso del modelo hedonista, ya que asigna valores a las categorías tales como gusto, belleza, que no son posibles medir desde las matemáticas.

Hay diferencias con este tipo de magnitud, para autores como Moulines, Campbell, Kuhn ( 1956,1996,1999) allí no hay proceso de medición porque sólo se mide lo que es posible asignarle un valor numérico ,otros señalan que es posible medir características cuantitativas y características cualitativas, ya que en las últimas medir es asignar una categoría a rasgos cualitativos (Godino, Batanero & Roa, 2004), y para Russell ( 1977, citado en Batanero 1991) puede ser que este tipo de medida sea absurdo, pero puede tener alguna importancia práctica, pudiendo construirse el cálculo hedonista.

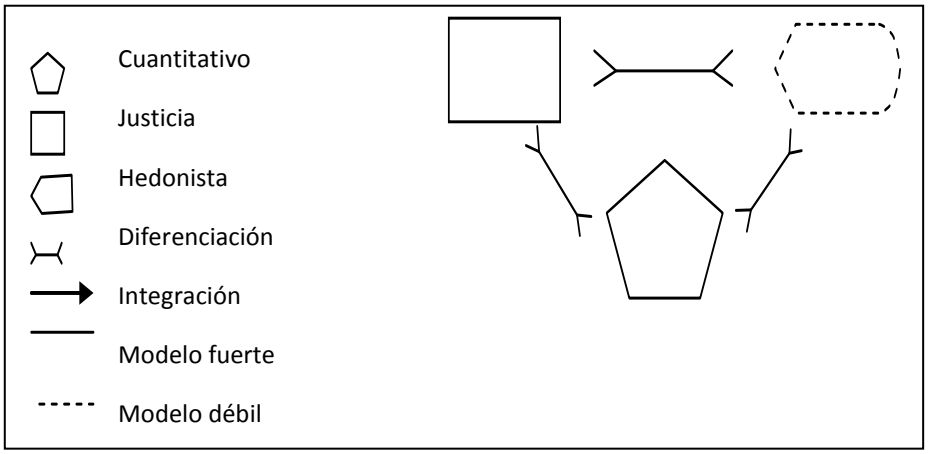
En el siguiente protocolo se identifican la aplicación del cálculo hedonista:

> *"La mortadela es **muy** rica*
> *Este es dulce pero **más** bueno*
> *Porque es **muy** lindo y porque me gusta **much**o". (P.1)*

El P.1 asigna categorías como "muy""más" y "mucho" a la belleza y al gusto, es decir asigna valores a cualidades no medibles desde las matemáticas. En la expresión "la mortadela es muy rica", siente placer al comerse un pan con mortadela, y que esto lo expresa a través de la palabra "muy" para medir ese grado de satisfacción. En la decisión juega papel importante la percepción, puesto que los objetos que se presentaron a los estudiantes tenían todas las mismas cantidades de masa, pero todos tenían tamaños diferentes, que eran perceptibles.

En la antigüedad de acuerdo con apreciaciones dadas por Kula (1999), en la medida prevalecía un valor cualitativo más que cuantitativo, es decir, el oro no se vendía por la cantidad de oro si no por sus cualidades, la tierra se vendía de acuerdo con la calidad del terreno, por eso el que tenía tierra árida, su finca era más extensa que el que tenía tierra con un terreno fértil.

En la siguiente gráfica se muestra las relaciones que se dan entre los diferentes modelos explicativos propuestos por el participante.




Gráfica 4. Relación modelos explicativos P.1

En los instrumentos 1 y 2 (donde aparece el modelo cuantitativo), se presentaron instrumentos de medida estandarizados y no estandarizados y se pudo interpretar que cuando se hace uso de éstos en el proceso de medición, el participante ve necesario asignar números a características de los objetos.

Desde las matemáticas "medir es asignar números a cualidades medibles de los objetos", y dicha apreciación corresponde a lo realizado por el participante, puesto que toma cualquier instrumento de medida, y lo utiliza para dar mediante el número un valor que le asigna durante su uso.

En las siguientes líneas se deja ver el uso de la asignación de número a la cualidad medible de objeto:

*"¿Para qué utilizas la regla?*
*Para medir cosas y poner bien las líneas.*
*¿Para poner bien qué?, ¿tu mides las líneas? explícame.*
*Primero subrayo de 1 a10, cojo el lápiz y mido hasta diez, luego trazo la raya*
*¿Tú sabes que quiere decir este 1 y este 10?*

*No*
*¿Pero tú sabes que quiere decir esos números en la regla?*
*No." (P.1)*

Más adelante aplica nuevamente la asignación numérica:

*"Bueno ahora aquí (gramera dos) ¿sabrías decirme la cantidad que pesa?*
*902.*
*¿Y esos 902 qué quiere decir?*
*No sé.*
*¿Pero por qué utilizas esos números?*
*No sé…serán los número para saber cuánto pesan*
*Tú me dices 902, ¿sabes qué quiere decir ese 902?*
*No sé*
*¿Por qué?*
*Porque aquí hay 900 (gramera?)" (P. 1).*

En este fragmento hace referencia a que solamente con la cantidad se da el resultado del proceso de medición, sin tener en cuenta la unidad de medida. En el participante el uso del número es necesario para la medida, y este se puede explicar por la prioridad que se le da a la enseñanza del número y se utilizan situaciones de medida para aplicar procesos de aritmetización.

El uso de los instrumentos estandarizados lo lleva a asignar cantidades a las características de los objetos, y ésta es considerada como uno de los últimos procesos en la construcción de la medida(M.E.N, 1998). Otro factor que puede ser obstáculo para dicho proceso es el uso constante de los profesores de proponer problemas donde lo importante es la identificación de alguna estructura aditiva o multiplicativa más que la construcción de la medida (Chamorro Plaza M. d., 2001), cuyo resultado es la tendencia generalizada a proporcionar un número como producto de una medida, sin mención expresa de la unidad; en palabras de Chamorro ( 2003) es la utilización de la medida-imagen, porque se da la imagen mediante una aplicación sin que se diga cuál sea ésta, es decir es la asignación del valor numérico.

Durante el rodaje de los diferentes modelos surgen elementos como el uso de la magnitud y procesos como el conteo, la estimación, la apreciación del rango aunque no frecuentes en los protocolos. Estos son elementos que sirven para concluir que hay algunos aspectos que van emergiendo o desapareciendo en dicho modelo, por ejemplo el uso de conteo lo asignan los niños a la medición, ya que establecen relación entre la medida y el proceso de conteo. El participante 1 sólo hace uso de este proceso en el momento en que se le pide calcular el tiempo que se demorará recorriendo cierta distancia, donde propone calcular el tiempo contando el número de pasos: en efecto, durante la observación del video el numero de pasos que da para realizar el recorrido ,es el número que finalmente termina asignando. En términos de Vasco (citado en M.E.N 1998), en los niños es muy fuerte relacionar sus actividades de medir con acciones para realizar un recuento de los números, porque dichas acciones se dejan controlar por los números de contar[1] , o números naturales.

El proceso de estimación, necesario para la construcción de la medida (Dickson, Brown, & Gibson, 1991), puede estar surgiendo en el participante, ya que la realidad perceptual de la medida comporta siempre una aproximación y un error, aspecto que no es frecuente en los alumnos, ya que la medida es presentada como algo mas o menos exacto sin que la precisión juegue un papel importante. Obsérvese el siguiente protocolo: (calcular el peso de la arena)

> *"¿Lo puedes pesar aquí?*
> *No sé, porque hay mucha y es muy pesada". (P1)*

[1] La expresión "números de contar" es utilizada por el Doctor Carlos Eduardo Vasco (1987), para designar una cualidad de los números naturales.

Aunque en el relato no se evidencia, el P.1 al tomar la bolsa con arena y poder sostener que es *muy pesada*, debe tener construido en sus estructuras cognitivas algún sistema de referencia que le permite realizar dicha apreciación. Godino, Batanero y Roa (2004) dejan ver la necesidad de construir sistemas de referencia, porque esto permitirá mejores resultados en los procesos de estimación de las magnitudes, permiten medir las magnitudes sin utilizar instrumentos de medida, siendo importante porque en los diversos contextos donde se vinculen los estudiantes no van a tener a la mano instrumentos estandarizados para realizar dicho procesos.

Otro elemento que surge en lo conceptual es la magnitud ya que realiza comparaciones, distingue en las magnitudes presentadas lo medible del objeto, atributos como la longitud, el peso, el tiempo y considera que "el peso" como una propiedad distinta a las otras.

El participante 1 durante las situaciones involucradas en los diferentes modelos utiliza la magnitud concreta. Llámese magnitud concreta a la creación y abstracción en el fenómeno u objeto, la cantidad susceptible de medición haciendo referencia al ancho, alto, al espesor, altura, profundidad y posteriormente estos elementos logren ser fundidos en uno sólo o abstraer de todas esas magnitudes la magnitud abstracta, como sería es este caso la longitud (M.E.N, 1998): en este caso el participante no se ha descentrado del objeto para analizar lo que es medible en él.

En la utilización de la magnitud hizo uso de elementos tales como: la selección de unidades, patrones (hace referencia a los antropométricos, y lo no estandarizados) y de instrumentos y la apreciación del rango de magnitud. La selección de unidad, es la adecuación que se hace entre lo que se desea medir y el objeto elegido como unidad; la apreciación del rango de

magnitud es la estimación perceptual del rango en que se halla una magnitud concreta.

En la selección unidad no realizó la utilización de patrones antropométricos, o de patrones no estandarizados, fue frecuente el uso de los instrumentos estandarizados , elemento extraño en el P.1, por lo general los niños hacen uso de unidades antropométricas (Dickson, Brown, & Gibson, 1991). Esto pudo haberse dado por la presentación de instrumento estandarizados, ya que la utilización prematura de estos instrumentos es muy frecuente en la escuela (M.E.N, 1998); también en este caso pudo haber sido el impacto de contextos extraescolares (Font V. , 2007).

En el desarrollo de las situaciones se integraban los procesos de magnitud, selección de unidad y apreciación de la magnitud, ya que en algunas ocasiones el participante 1 para hallar la medida de algún objeto en alguna magnitud respectiva, valoraba el instrumento que era pertinente utilizar de acuerdo con la cantidad de magnitud; en el siguiente fragmento se puede ver dicha relación de integración:

> *"De estos objetos de aquí ¿cuál utilizarías para saber la cantidad de arena que hay ahí?*
> *Este (gramera con mayor magnitud).*
> *¿Por qué este no? (gramera con menor magnitud)*
> *De pronto se daña con eso.*
> *¿Por qué?*
> *Porque hay mucha y es muy pesada.*
> *¿Cómo sabes que está muy pesada?*
> *Viéndola" (P.1)*

Aquí se observa que para medir el peso de la arena, en vez de masa se utilizará la palabra peso porque es la que se ve afectada por la fuerza de

gravedad (Godino D. Juan; Batanero C; Roa R, 2004), no quiere decir esto que el estudiante lo utilice como peso, el estudiante analiza cuál de las dos grameras va utilizar, concluyendo que se puede dañar la gramera por la cantidad de arena existente, que hace que tenga más peso.

Obsérvese que para la solución de la situación anterior, el participante realizó varios procesos: analizar qué es lo medible del objeto, el rango de magnitud para seleccionar la gramera, es decir, hizo uso de estimaciones perceptuales propias de los procesos de medición (M.E.N, 1998); en dicho proceso está fuertemente implicado el proceso de percepción. Sanmartí( 2002) indica que éste es uno de los desencadenantes importantes de la construcción de conocimiento científico y en esa dirección se puede decir que la percepción es necesaria para la construcción de la medida y los proceso que están involucrados en ella; ésta es el comienzo de la medición (Godino D. Juan; Batanero C.; Font V., 2004).

Se puede concluir que el P.1 en el momento de dar soluciones a las situaciones propuestas, posee tres modelos claramente diferenciados, esta inferencia está limitada por los instrumentos aplicados, pero lo que sí es claro es que dependiendo de las situaciones planteadas, tiene diferentes modelos explicativos para resolver y asumir la medida.

b. El contexto en la construcción de la medida

Dentro del análisis se tuvo en cuenta la relación existente entre el contexto y la construcción de la medida, porque fue una de las categoría iníciales que surgió y emergió en los datos aportados por el participante.

En el participante hay construcción de la medida en un contexto extraescolar (Font V. , 2007), ya que el uso que él hace uso de los

instrumentos de medida estandarizados, hace referencia a eventos que ha vivido y los relaciona con situaciones que se le presentan durante la entrevista; algunas de las decisiones que toma son el resultado de la interacción con situaciones no didácticas (Chamorro P, 2003), porque nadie las ha organizado para permitir un aprendizaje; son producto de su relación con el mundo natural, familiar: en ella no hay docente, ni alumno, no ha sido diseñada para que alguien aprenda.

La influencia de dicho contexto le han permitido construir diferentes modelos explicativos de la media: cuantitativo, hedonista y justicia; aunque no aparece explícita en los protocolos, se puede ver su relación con la medida. Se refleja el modelo de justicia distributiva bien sea por merecimiento o por igualdad de condiciones (Quintero Mejía, 2006), ya que el participante en algunas ocasiones decía "*que le den la mayor cantidad de comida a Camila porque ella no ha comido nada*", es decir hay solidaridad como los más débiles o desde supuestos de igualdad "*es que todos somos iguales y todos tenemos derecho a la misma cantidad*".

De otro lado, la utilización de la medida en diversos contextos, en este caso en situaciones evocadas (Font & Ramos, 2006) que describen una situación real, le permitieron dar cuenta de hechos que ha vivido en su cotidianidad:

> *"¿Tú sabes manejar la gramera?*
>
> *Muchas veces cuando estoy en la finca con el abuelo y él me dice que pese*
>
> *¿Tu abuelo te ha enseñado?*
>
> *Si".(P.1)*

*De igual forma sucede en otra situación que se le plantea*

> *"¿Has llegado a utiliza el cronómetro?*
>
> *Si, en lo celulares…..no más*

*¿Para qué lo has utilizado?*

*Para que no se pasen los minutos….*

*Explícame, no entiendo*

*Donde mi abuelita, ella me pone a mirar el tiempo, cuando vayan cinco minutos dice que venga ya y listo". (P.1)*

Él hace referencia al uso de la medida y de los instrumentos de medida en contextos que son externos a la escuela, esto le aporta a la construcción del concepto de medida porque le ha permitido comprender los instrumentos que son utilizados para determinadas magnitudes, en este caso la longitud, el tiempo la masa; también le permitió reconocer que en los procesos de medida es necesario asignar números a lo que se desee medir del objeto.

Estos diversos contextos en los cuales está sumergido el estudiante, deben ser abordados por el docente en el momento de diseñar sus actividades de aula, porque esto le permitirá al estudiante realizar procesos de conversión de un registro semiótico: contexto escolar a otro registro semiótico: contexto extraescolar, del cual hace referencia Duval (D-Amore B. , 2006.). Lo anterior hará que emerjan procesos de comprensión en la construcción del objeto matemático medir.

Según Duval (citado en D-Amore, 2006), en matemáticas, la adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas, por lo tanto las construcciones de los objetos matemáticos dependen de la capacidad de usar más registros de representación semiótica, donde se pueda:

1. *Representarlos* en un dado registro
2. *De tratar* tales representaciones al interior de un mismo registro
3. De *convertir* tales representaciones de un dado registro a otro.

Dentro del análisis anterior cabe preguntarse ¿qué tanto interés le presta al maestro a lo que ha construido el estudiante alrededor de la medida?,

¿cuáles son los contextos en los que el estudiante interactúa para hacer uso de dicho objeto? Normalmente en el aula lo que se presentan son situaciones descontextualizadas o contextos escolares que tiene que ver con la matemática académica (Chamorro Plaza M. d., 2001), la matemática formal, que está regida por reglas, normas, algoritmos, técnicas y en realidad los conceptos de las matemáticas de la vida real, especialmente el de la medida, es mucho más amplio, que el concepto de la matemáticas académicas (Diez Palomar, 2000).

c. El uso de representaciones semióticas alrededor de la medida

A través de las representaciones semióticas, se hace posible comunicar los objetos matemáticos por ser entes abstractos, y el análisis de dichos representaciones nos permitirá comprender la construcción del objeto matemático medir, porque éste depende estrechamente de la capacidad de usar representaciones semióticas de esos conceptos: de representarlos, de tratar las representaciones, y de convertir (D-Amore B. , 2004) .

El lenguaje verbal expresado por el P.1 permitió reconocer algunas representaciones semióticas de las que hace uso:

- Asignación cantidad a magnitud: número de contar, cuantificadores indefinidos, cuantificador partitivo, número decimal
- Tipo de magnitud: magnitud concreta, abstracta
- Tipo de unidad: Patrón, concreta
- Sistema de medida: No convencional, convencional

Dentro del modelo explicativo cuantitativo las representaciones que utilizó para la “asignación cantidad” fueron: número de medir y cuantificadores, tipo magnitud: magnitud concreta.

- Asignación de cantidad: el uso de representaciones semióticas se evidenciaron a partir del uso de cuantificadores indefinidos y números de contar, existiendo tendencia al uso de los cuantificadores indefinidos. En el uso de la asignación de números de contar, se infiere la necesidad del participante 1 de capturar lo continuo con lo discreto, es decir las magnitudes que se miden son discretas, no hay partición de la unidad.

  Hace uso de cuantificadores indefinidos, que le permiten realizar procesos de comparación, además asignarle cantidad a los objetos, dicha utilización puede surgir porque el estudiante no utilizó patrones o unidades, entonces esto le sugirió la asignación números, o también es posible que no tuviera disponible en sus estructuras cognitivas sistemas de referencia que le ayudarán asignar valores numéricos, pero si tenía sistemas de referencia que le permitían hacer comparaciones. Obsérvese en la siguiente tabla ejemplo de lo anteriormente descrito:

| Representación | Datos |
|---|---|
| Número de contar | • Cuando vayan 5 minutos<br>• Tres onzas<br>• Primero subrayo del 1 al 10<br>• Cojo el lápiz y mido hasta 10 |
| Asignación de cuantificador | • Los que son **más grandes** que esos<br>• Para cosas **pequeñas**<br>• **Muchas** veces cuando estoy en la finca con mi abuelo.<br>• Para que no gaste **tanto.** |

Tabla 6. Representaciones semióticas

Tanto en el modelo hedonista como el de justicia, se utilizaron frecuentemente cuantificadores indefinidos, este caso es probable que

sucediera, porque eran situaciones donde se seguían proceso de medición pero más desde aspectos informales que formales de las matemáticas.

- El tipo de magnitud utilizado por el P.1 fue la magnitud concreta, ya que se refería a lo medible del objeto a través de sus cualidades, es decir, aún depende mucho del objeto para analizar la característica susceptible de ser medida
- Tipo de unidad: en algunas ocasiones hace uso de las unidades del sistema métrico decimal como son el gramo, minutos, segundo acompañada de los números de contar, pero eso no quiere decir que en realidad haya una construcción de dicho objeto matemático, pues en los relatos hace uso de unidades objetales (Chamorro Plaza, 1991), ya que la unidad está relacionada con lo que debe medirse "*el metro sirve para medir el ancho, el largo*" obsérvese aquí que la unidad está todavía muy ligada al objeto a medir ( intraobjeto).

  Es frecuente encontrar que cuando realiza el proceso de medida utilice dos objetos distintos en la solución en la situaciones de Brousseau (1991): El valor de la medida o medida-imagen, porque simplemente asigna un número que le corresponde a la medida realizada o el número concreto, que es el par formado por la imagen y la función representada por una unidad, *" aquí hay 600 (probeta 1 ) y aquí hay 900 (probeta 2)"*, estos dos números no pueden representar una medida, porque 900≠0,9, por el contrario 900 gr es la misma clase de 0,9 kg.

- El sistema de medida usado en las representaciones es el convencional, en este uso pudo incidir la presencia de los objetos de medida estandarizados como la probeta, la gramera, el metro etc.

En los protocolos no se evidenció para estos registros proceso de conversión y tratamiento. De acuerdo con Duval (1999) estos son necesarios

para la comprensión de los objetos matemáticos, ya que hay tendencia a quedarse con las representaciones semióticas del los objetos y no con la compresión del objeto.

**Participante 2**

*a. Modelos explicativos alrededor de la medida*

Durante el análisis surgieron cuatro modelos explicativos alrededor de la medida: el religioso, el de justicia, el hedonista y el cuantitativo. Del análisis se observó que se tiende al uso del modelo de justicia y el modelo cuantitativo. Obsérvese la siguiente tabla:

| Modelo explicativo | I 1 | | | | I 2 | | | | | | I 3 | | | I 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | C | | | | J | | | R | M | | J | | | H | |
| Nª Pregunta | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| Cuantitativo | X | x | x | x | | | | | | | | | | | |
| Justicia | | | | | x | x | x | X | | | x | x | x | | |
| Mítico | | | | | | | | | | | | | | | |
| Religioso | | | | | | | | X | | | | | | | |
| Hedonista | | | | | | | | | | | | | | x | x |

Tabla 7. Modelos explicativos P.2.

En el modelo cuantitativo recurre el participante a utilizar el número para asignar la medida seguida del nombramiento de una unidad que no tiene relación con la magnitud que miden; es posible que la utilización de instrumentos estandarizados lo motive a la utilización de dichos elementos. Cuando se le pide desarrollar las situaciones de medida, inmediatamente recurre al uso de instrumentos estandarizados, para asignarle cantidad, no recurre a procesos de estimación o de comparación. Parece ser que la

incorporación de los instrumentos de medida en la solución de la situación, tiene implicación con la asignación de cantidad, de número a la cualidad medible del objeto, sea cual sea la cualidad.

Lo anterior se puede dar por el uso excesivo que hace la escuela de la utilización de dichos instrumentos. Además de la tendencia formalizada de enseñar la medida, esto ha provocado distorsiones y diversos obstáculos en su aprendizaje, en este caso pensar que la medida es simplemente la asignación numérica de alguna propiedad del objeto.

En el modelo de Justicia, el participante 2 asume la medida desde aspectos distributivos y de igualdad. En una de las situaciones donde se pide repartir comida en una fiesta, deja ver la medida como la asignación de igual cantidad de torta a todos; en esa misma situación también sugiere que se le dé más comida a quien no ha comido, es decir, solidaridad con el necesitado. Obsérvese el siguiente protocolo registrado:

> *"No, yo no estoy de acuerdo, porque si todos dimos, ¿por qué se lo vamos a dar todo a uno?*
>
> *No, pero así de mitades para cada niño según lo que dio.*
>
> *De acuerdo con lo que dio, porque todos los niños dieron plata y la alcancía se fue llenando, entonces tendría que hacer algo y repartir el dinero para todos.*
>
> *Sí…o que ayuden también los niños, para saber cuánto le toca a cada uno, y nadie se puede llevar más que otro porque a todos nos toca igual. (P.2)*

Lo anterior describe la repartición del dinero de una alcancía, donde el participante sugiere para su solución, la igualdad; en otro momento propone un proceso de medida distributiva, porque sugiere que se reparta de acuerdo con lo que aportó cada uno, pero finalmente sugiere que a todos les toca igual, puede que ello ocurra, por la necesidad de la justa medida (Kula, 1999), donde a cada quien se le da lo que se merece. Posiblemente el participante tienda en el modelo de justicia a utilizar estos dos tipos de

modelos para explicar porque en algunos momentos hace uso de la medida igualitaria y en otros de la medida distributiva.

El modelo religioso aparece en su discurso, aunque no es frecuente, pero es interesante porque lo relaciona con procesos de justica, es decir hay tendencia a integrar lo justo con hechos religiosos. Tal apreciación aparece también en la Biblia: *"Tendrás pesas cabales y justas, para que se alarguen tus días sobre la tierra que Yavé tu Dios te da*" (Kula, 1999). El participante hace referencia a las sanciones divinas que puede sufrir si no se actúa de buena fe ante un proceso de medida, es decir, será castigado por sus actuaciones.

El participante reseña un pasaje de la Biblia "la historia de lázaro y El señor", y la relaciona con una de las situaciones (instrumento 4), donde argumenta que si la profesora se roba la plata de la alcancía, podrá sucederle lo mismo que al rico de la historia: *"Cuando ellos se murieron el rico se fue para el infierno y el pobre se fue para el cielo"*. Es decir las acciones justas te llevarán a ocupar un lugar en el cielo.

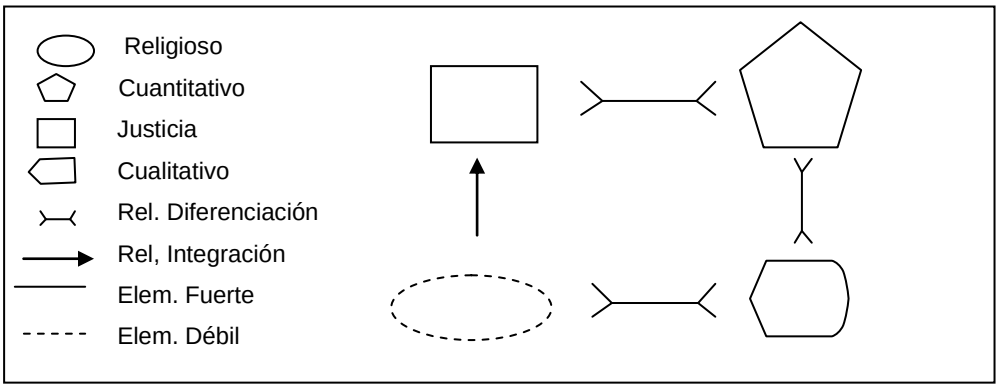
Otro modelo explicativo que surge es el hedonista, ya que se aplica procesos de medición a magnitudes que no son medibles desde las matemáticas. En el siguiente fragmento se describe el porqué escoge cierto recipiente para tomar líquido.

> *"¿cuál de estos recipientes escoges y por qué?*
>
> *Éste (cristal),* ***porque me mucho gusta el color*** *de este…….. este no****, es muy infantil****, este también* ***es muy infantil*** *y… me gusta mucho el fondo porque es del mismo color de mi equipo (verde)". (P.2)*

Aquí se observa que lo que se pretende medir son aspectos físicos de los recipientes, donde clasifica los diversos recipiente que hay por ser infantiles,

en este caso la magnitud sería infantil, donde el asigna una cantidad con la utilización de un cuantificador “muy”; lo mismo sucede con la magnitud gusto y le asigna el mismo cuantificador. Como se ha dicho anteriormente, desde aspectos puramente matemáticos, este tipo de medida no suele tener significado pero desde aspectos personales suele tenerlo, porque ello les permite expresar el grado de satisfacción que sienten por ciertas cosas.

La siguiente gráfica permite visualizar las diferentes integraciones y diferenciaciones que se dan entre los modelos.




Gráfica 5. Relación modelos explicativos P.2

En la solución de las diferentes situaciones surgen elementos necesarios para la construcción de la medida. En el participante 2 surgieron: la magnitud, la apreciación del rango de magnitud, la selección de la unidad, patrones e instrumentos, el conteo y la estimación.

La utilización de estos elementos en su discurso no indica que haya comprensión de los mismos, ya que aspectos como el empleo de la unidad, la utilización de los instrumentos , le permiten instrumentalizar la medida, es decir, para la cualidad que sea medida se debe utilizar un instrumento, sin

importar su pertinencia, y cada medida arroja como resultado un número que va a acompañado de una unidad sin importar si es adecuada o no . Analicemos el siguiente apartado:

> *"Por ejemplo si en este recipiente (probeta) echáramos agua, ¿la regla te serviría para medir la cantidad de agua?*
>
> *No*
>
> *¿Por qué?*
>
> *Porque la regla no tiene lo suficiente para medir el agua.*
>
> *Si yo echo agua en este recipiente ¿cómo sabrías qué cantidad de agua hay ahí?*
>
> *Así (introduce el metro al recipiente).*
>
> *¿Y el metro si te alcanza?*
>
> *Sí*
>
> *¿Cuánta agua hay ahí?*
>
> *Hay 7 metros*
>
> *¿Y por qué 7metros?*
>
> *Porque uno mide y ahí sale cuánto midió*
>
> *¿Con la regla puedes saberlo o no?*
>
> *También, pero queda muy… (Mide) también dio 7 metros"(P.2).*

El niño hace uso de la cantidad de magnitud pero la unidad en este caso metros, no corresponde a la lectura real, centímetros. No calculó la cantidad de agua que podía haber en la probeta, calculó la altura que alcanzó el agua en la probeta; además no analizó la unidad de medida que le asigna al número, porque tanto en la regla como en el metro le dio la misma magnitud "7 metros" y en realidad eran 7 cm.

Se observa como el proceso de instrumentalización de la medida es un obstáculo para el aprendizaje de la misma. Al respecto Díez Palomar (2000) señala que la escuela presta mayor importancia a las matemáticas

formalizadas y que éstas pueden generar dificultades en la construcción de las mismas.

También se refleja la necesidad de participante por asignar números a la magnitud a través de los instrumentos estandarizados. Esta forma de resolver la situación puede ser producto de la enseñanza, ya que en la escuela predomina el tipo de actividades donde lo que se pretende es el uso adecuado de los instrumentos que se relacionan con una unidad correspondiente, dejando de lado las experiencias informales del niño. En la enseñanza de la medida son necesarios los elementos estandarizados que surgen alrededor de ella como los no estandarizados, pero en la escuela se deja de lado la experiencia que tiene los niños frente a estos aspectos (NTCM, 2000).

De otro lado, está la apreciación del rango de magnitud y la selección de la unidad que surgieron en el análisis. Estos dos elementos tienen estrecha relación con el atributo medible del objeto, porque dicha integración favorece el desarrollo de los procesos de estimación, el participante al tratar de medir la cantidad de materia mensurable, analiza el instrumento que va utilizar haciendo uso de la estimación perceptual.

En la estimación se utiliza un proceso que es necesario para su construcción: la comparación, indispensable para desarrollar sistemas de referencia de las diferentes magnitudes (Godino D. Juan; Batanero C.; Font V., 2004). El siguiente protocolo describe la selección del rango de magnitud y el proceso de estimación que hace el participante para analizar la gramera que puede servir para pesar la arena:

*"¿Para qué sirven esas pesas?*

*Para pesar objetos o personas, pero esas no (grameras de 1 kilo)?*

*¿Esas sirven para pesar personas?*

*No, donde alguien se suba ahí (gramera) se* daña".(P.2)

Se le pide que calcule el tiempo que demora en recorrer una distancia. Explica cómo lo haría.

*"Con el cronometró*

*¿Y si no tuvieras el cronómetro?*

*Con el reloj*

*¿Y si no tuvieras el reloj?*

*Contando los pasos*

*¿Cómo contando los pasos?*

*Así contando los segundos*

*¿Y cómo sabes que estás contando los segundos?*

*Porque se cuenta hasta 60 (mira el reloj) ahh no se cuenta hasta 5, porque me voy a demorar 5 minutos". (P.2)*

Se observa en el primer protocolo el uso de la estimación perceptual que hace el participante para seleccionar el instrumento de acuerdo al rango de magnitud que se tiene, puesto que cuando se le pregunta si esas grameras sirven para pesar personas, sostiene que no porque se dañarían; por lo tanto, la estimación perceptual permite analizar el rango en que se halla la magnitud concreta, antes de seleccionar una unidad, patrón o instrumento de medida.

En el segundo protocolo no se le permite utilizar instrumentos estandarizados para valorar el tiempo que se demorará recorriendo cierta distancia. Para darle solución a la situación involucra el conteo y por lo general, en los procesos de medida los niños utilizan este tipo de estrategia porque ellos tiende a asignar valor a las acciones realizadas (M.E.N, 1998), es decir, cuando él dice que lo va realizar contando los pasos, lo que mide no es el paso o los segundos que transcurren, sino la acción del dar el paso. En el video se puede observar como da 25 pasos y finalmente termina diciendo que es el tiempo que se demora en recorrerlo.

b. El contexto en la construcción de la medida

El contexto extraescolares (Font V. , 2007) es relevante en el participante, porque en los protocolos hace referencia a situaciones vividas donde no se involucra la escuela, se refieren a las actividades que realiza: jugar fútbol, ayudar a sus tíos en la costura, en la compra de café, actividades que realiza en su casa como la elaboración ciertos alimentos con su madre.

En el siguiente protocolo se narra un hecho donde hace uso de la medida:

> *"¿Cuál otro más utilizas en tu casa?*
>
> *Ahh esto (soga) también lo utilizaba yo.*
>
> *¿Para qué?*
>
> *Para medir la cancha, porque nosotros siempre cuando llega mi primo, como a él le gusta tanto el jugar fútbol, entonces comenzamos a jugar pues un partido.*
>
> *¿Pero cómo utilizas la soga?*
>
> *Porque entonces a un equipo le toca una parte de cancha y al otro la otra.*
>
> *¿Y entonces qué hacen?*
>
> *Para medir la mitad y para mirar a dónde puede meter el gol"(P.2).*

Obsérvese que el participante hace uso de un patrón de medida para construir la cancha y la situación lo lleva a utilizar los elementos que ha construido alrededor de la medida para darle solución. Las situaciones que se presentaron en la investigación hacían uso de las magnitudes comunes en su entorno, y posiblemente puede que esto haya provocado que el participante hiciera explícitos diferentes situaciones donde él ha estado involucrado.

En el contexto hay aspectos culturales, que pueden contribuir al desarrollo de ciertas magnitudes como lo son la longitud, el peso, el tiempo y posiblemente estas sean las que el participante 2 comprenda, puesto que son propias de su acontecer diario. En la construcción y comprensión de la medida se hace indispensable realizar actividades concretas donde el haga

uso de material real (NTCM, 2000); donde las situaciones presentadas sean los más próximo a su realidad (Chamorro Plaza, 1991), puesto que ellas le permitirán evocar situaciones que ha vivido y construir o reconstruir elementos relacionados con la media.

Otro aspecto que sobresale son situaciones del contexto escolar, pero surge como un obstáculo en su modelo, puesto que en el desarrollo de las situaciones propuestas, sentía la necesidad de estar reduciendo todo a magnitudes longitudinales, lo que se infiere porque en el momento de narrar sus vivencias extraescolares con los instrumentos de medida y su relación con las magnitudes, pareciera que había cierta claridad, pero cuando se le propuso calcular, por ejemplo la cantidad de masa de arena, realizó una línea prolongada con la arena para medirla con el metro. Otra situación surgió, cuando propuso vaciar la arena en una botella y medir la altura de la botella con el metro para saber la cantidad de arena, es decir, en ningún momento se observó que deseara utilizar las grameras que estaban dispuestas para ello. Las anteriores acciones no son coherentes, porque en una de las situaciones extraescolares que él narró, plantea que el tío utilizaba la gramera para pesar el café.

Dado lo anterior es necesario aclarar, que cuando se hace uso de una medida longitudinal, era insistente en pasar los centímetros a milímetros o a metros, es decir, en utilizar equivalencias y eso es producto de la escuela, ya que la escuela ha puesto mayor énfasis en proceso algorítmicos, procesos formales (Chamorro Plaza M. d., 2001), situación que no en las situaciones del contexto extraescolar: no hay tendencia a utilizar algoritmos, ni proceso de conversión de sistemas, ya que narra como hace uso de la medida.

Por el contrario, el contexto extraescolar no es un obstáculo, es un elemento que aporta al aprendizaje de la medida, porque a través de él, el maestro puede comprender como el niño ha construido a través de sus vivencia

informales los procesos de medida y la cultura que le rodea alrededor de ello y proponer acciones en el plano de lo didáctico que le permiten construir aprendizajes profundos.

c. El uso de representaciones semióticas alrededor de la medida

El participante hace uso de diversas representaciones semióticas para comunicar lo que ha construido alrededor de la medida, y los analizados en esta investigación fueron: asignación de cantidad de magnitud, tipo de magnitud, tipo de unidad, tipo de sistema de medida.

A continuación se analizará el tipo de representación semiótica que hace para cada registro:

- Cantidad de magnitud. En el análisis se pudo evidenciar que hace uso de tres representaciones diferentes: número natural, cuantificador indefinido y cuantificador partitivo. La representación número natural, emerge con mayor frecuencia en los datos, donde su mayor uso se hizo en el modelo cuantitativo, concluyéndose la necesidad del participante de capturar lo continuo con lo discreto (M.E.N, 1998) o como lo menciona Chamorro (2003), el espejismo de la medida exacta lleva al estudiante a que proporcione un número como resultado de una medida.

  El uso de cuantificadores partitivos es un elemento que representa importancia en el análisis, porque es la ilusión de los alumnos por tratar de relacionar expresiones como "la mitad" con unidades enteras, ya que esa expresión no tiene un valor fijo ( (Chamorro P, 2003). En los datos se evidenció el uso del cuantificador partitivo "la mitad"; su uso frecuente en el modelo de justicia, y posiblemente se de esto por la necesidad de relacionar la mitad con la igualdad en procesos de medida.

Por otro lado está el uso de los cuantificadores indefinidos, que aparecen en el modelo cuantitativo, hedonista y Justicia. Dicha utilización puede darse porque el uso de estos cuantificadores, le permiten acceder a procesos de comparación, sin necesidad de la asignación de cantidades a través de números, y posiblemente esto le de mayor seguridad al participante en sus explicaciones.

En la siguiente tabla se presenta un registro de las representaciones:

| Número natural | Cuantificador indefinido | Cuantificador partitivo |
|---|---|---|
| Si cabe, porque mide así de lado… **26** más **17** más que 35, mucho más que **35**. | nadie se puede llevar **más** que otro porque a todos nos toca **igual**. | Para medir la **mitad** y para mirar a dónde puede meter el gol. |

Tabla 8. Representaciones semióticas

- Tipo de Magnitud. Durante el análisis de los datos donde se hacía referencia a la magnitud se expresaba la utilización de la magnitud concreta, ya que suele referirse a características de estas como son: el largo, el ancho, lo pesado que es. En la edad del participante esto es normal, porque su proceso de construcción de la magnitud empieza con las utilización de una magnitud concreta, ya que la construcción de la magnitud abstracta, es un proceso de abstracción muy complejo (M.E.N, 1998), porque él debe descentrar la magnitud del objeto medible, es decir no es el largo de este objeto, sino la longitud de cualquier objeto.

- Tipo de unidad. Aunque la unidad no fué un elemento realmente relevante en el análisis, porque se observa la tendencia del participante de utilizarla por aspectos formales de medida, es decir cuando el asigna 7 metros, su comprensión al respecto es que hay que asignar un número acompañado de algo, este obstáculo puede darse por la enseñanza, ya que se le da

más importancia a la asignación de cantidad, que a la misma unidad que se usa; además la influencia que tiene la escuela en el uso de dichos nombre sin comprensión alguna. Este elemento de la medida parecer ser que sigue siendo ausente en los currículos de matemáticas (Chamorro P, 2003) , por su ausencia en las construcciones de los estudiantes, sin emebargo la unidad de la cual se hace uso es una unidad objetal

Otra representación que utiliza es el patrón, ya que cuando menciona contextos extraescolares hace referencia a ellos, en este caso la pulgada, el pie, el paso.

- Sistema de medida. En la construcción de la medida, es indispensable la construcción del sistema de medida, ya que este permite la organización de los sistemas sociales frente a este fenómeno. Pueden darse dos tipo de sistemas: sistema no convencional y el sistema convencional. En el sistema no convencional se dio en la aplicación del instrumento uno, done el particpante hace uso de éste para la longitud y tiene que ver con el uso de la cuarta él, pie, y la brazada. Obsérvese el protocolo:

*"Utilizó la brazada o la pulgada para medir la tierra.*

*La mido así (extiende el brazo derecho sobre la bolsa donde está la tierra) o toda la tierra regada.*

*Bien extendido y mido con la mano, con el pie". (P.2).*

El sistema convencional también surge en los datos recogidos:

*"Un metro es 50 milímetros, ¡ve¡ 100 milímetros.*

*Que los minutos son 50 y al hora es 60 minutos". (P.2)*

El participante desea realizar el tratamiento, con relación a la equivalencia en el sistema de longitudes: pasar de metro a centímetro, de centímetro a milímetro, de igual manera lo pretende realizar para el tiempo.

A pesar de que se observa este tratamiento, también se puede ver que hace uso inadecuado de las equivalencias y puede que esté sucediendo que se haga uso de la representación semiótica pero no comprenda la construcción del sistema métrico, es decir se queda solo con el uso de dicha representación (D-Amore, Bruno;, 2001). Este hecho podría ser un obstáculo para el aprendizaje de la medida y lo que tiene que ver con la construcción del sistema de medidas.

**Participante 3**

a. Modelos explicativos alrededor de la medida

Durante el análisis se pudo evidenciar que el participante hace uso de cuatro modelos explicativos para procesos de medición, estos son: Cuantitativo, hedonista, religioso y justicia. En el siguiente cuadro se registra el uso de los diferentes modelos en las situaciones propuestas.

| Modelo explicativo | I 1 | | | | I 2 | | | | | | I 3 | | | I 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | C | | | | J | | | R | M | | J | | | H | |
| Nª Pregunta | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| Cuantitativo | x | X | x | x | | | | | | | | | | | |
| Justicia | | | | | x | x | x | x | | | x | x | x | | |
| Mítico | | | | | | | | | | | | | | | |
| Religioso | | | | | x | | | | | | | | | | |
| Hedonista | | | | | | | | | | | | | | x | x |

Tabla 9. Modelos explicativos P.3.

Se infiere del análisis que tiende a integrarse tanto el modelo explicativo de justica y el religioso, puesto que sobresalen aspectos como la igualdad, la penalización del infierno y de un Dios, frente a acciones de injusticia donde se involucra la medida. En una de las situaciones se hace referencia de que al repartir la plata de una alcancía la profesora se queda con cierta cantidad

de dinero ¿qué sucedería?. El participante menciona que la debe repartir a todos la misma cantidad y si no, la profesora recibirá sanciones:

> *"Dios la castiga, por lo que hizo, que se quiebre una mano, que se la tengan que amputar, también se la pueden llevar para el purgatorio".(P.3)*

Dichas explicación han sido influenciadas por la cultura, porque el participante narra historias que le han contado en su casa alrededor de lo que puede suceder cuando se actúa inadecuadamente; esto también se ve reflejado en otras culturas, donde se hablan de que siempre donde haya que contar y medir habrán injusticias y pecado (Kula, 1999), es decir se sancionará los hechos justos o injustos a través de personajes divinos en este caso Dios o el Diablo.

Otro elemento a resaltar en este modelo es la tendencia del participante a actuar en procesos de medida bajo aspectos distributivos o de igualdad relacionados en la medida, ya que en algunas ocasiones de acuerdo con la situación planteada, sugiere que al realizar medida se tenga en cuenta criterios de igualdad y en otros criterios que favorezcan al menos favorecido:

> *"Sí, estoy de acuerdo con ella porque si hay tanto niño pobre en el salón pues a todos les da una cantidad inmensa, pero a los que no tienen necesidad, les dan menos cantidad "*

Aquí se observa la medida desde aspectos de justica enfocada hacia la distribució; se pretende favorecer a los niños con necesidades económicas del salón. Véase el siguiente el siguiente registro donde el criterio de justicia es la igualdad:

> *"Estoy de acuerdo con Manuel, a todos que nos den por igual"*

El otro modelo que emerge es el hedonista, puesto que el participante mide cualidades de los objetos que a la luz de las matemáticas no son medibles, como por ejemplo el gusto. Asigna valores a través de cuantificadores a dichas cualidades que para él son medibles. En una de las situaciones se le

propone escoger entre ciertos objetos y se le propone explicar porque los escoge. A continuación se presenta uno de los registros:

*"Escojo el suspiro y la cocada porque me gustan **mucho**"*

*"Escojo este vaso porque es **muy** lindo"*

*"Este no lo escojo porque es **muy** infantil". (P.3)*

Obsérvese en los registros anteriores que las magnitudes que se miden son el gusto, la belleza y ser infantil. Para ello utiliza cuantificadores indefinidos, que le permiten expresen el grado de satisfacción o la cantidad de agrado que siente por x o y objeto, esto se puede deducir porque el participante, valora el agrado o desagrado que siente por dicho objeto. Bentham (citado en Peterfreund, 1996) constituyó un "cálculo hedonista", por medio del cual se podían medir los placeres y los dolores, es decir, estos dos aspectos pueden ser mensurables.

En el contexto científico de la medida no tiene valor medir el gusto, o valorar elementos cualitativos, ya que dichas cualidades no cumplen las siguientes condiciones para que una magnitud sea medible (Godino D. Juan; Batanero C; Roa R, 2004):

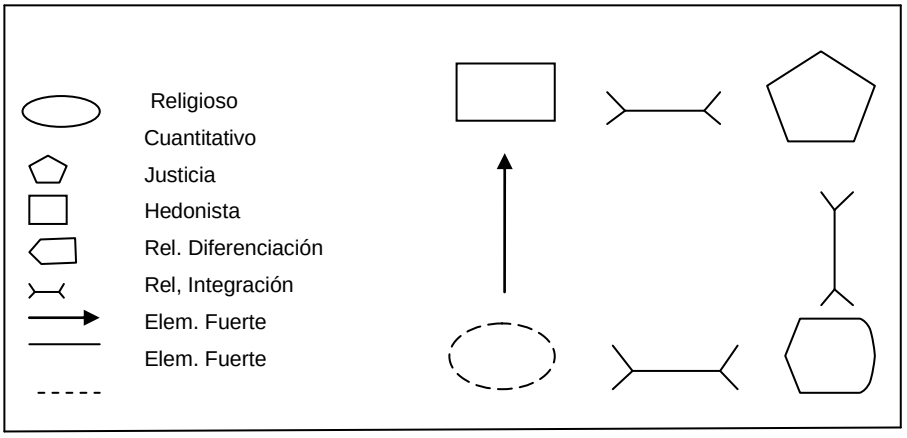
1. *Abstracción del concepto de cantidad.*
2. *Definir la relación de equivalencia*
3. *Definir la suma de cantidades*
4. *Relación de ordenación*
5. *Definir la operación externa, producto de números*
6. *Clasificación de la magnitud.*

Analizando si el gusto o la belleza se pudiesen medir, de entrada la primera condición propuesta anteriormente para la construcción de magnitud cancela dicha posibilidad, ya que a dichas cualidades no es posible

abstraerles el concepto de cantidad porque solo es posible expresarla a través de cuantificadores; además dicha abstracción es subjetiva, lo que para un individuo puede ser “muy bello” , para otro puede que no lo sea , entonces tampoco se cumpliría la relación de equivalencia ( 2da condición ) porque no se pueden organizar dichas cualidades en clases de equivalencia. Por lo tanto dichas cualidades desde las matemáticas no pueden ser medidas.

En el modelo cuantitativo, el participante tiende asignarle número a la materia mensurable, ya que sin importar si el instrumento utilizado es el adecuado para la magnitud que desea medir, arroja un valor numérico que represente lo que se está midiendo. Es posible que esto se deba a la presencia de instrumentos estandarizados durante la aplicación de algunas situaciones, ya que la escuela en algunas ocasiones le ha dado mayor importancia a los aspectos formales diseñados en los currículos (Chamorro P, 2003) que la experiencia informal que ha tenido el niño frente a este proceso matemático (NTCM, 2000).

El siguiente cuadro, permite visualizar como tanto el modelo de justicia, cuantitativo y hedonista son fuertes en el participante, ya que durante la solución surgían elementos correspondientes a cada uno. El modelo religioso surge en los datos aunque no con mucha fuerza y esto puede por los instrumentos utilizados.




Gráfica 6. Relación de los modelos explicativos P.3

En la solución de las situaciones emergen elementos que son necesarios para la construcción de la medida. En el caso del participante surgieron: el reconocimiento de magnitudes y el uso de los instrumentos. Reconoce en las situaciones propuesta lo mensurable del objeto presentado, el participante cuenta que *la probeta la utiliza la mama para medir el agua con los niños de la escuela*; *que la gramera la utiliza para medir la carne*; *que el metro la utiliza para medir tableros (y señala el largo del tablero)*, pero en el momento de solucionar diferentes situaciones de magnitudes diferentes utiliza el metro para realizar las medidas.

La utilización del metro y en especial la enseñanza de las medidas longitudinales ha sido obstáculo para la construcción de las otras magnitudes y esto se debe a que en los procesos de enseñanza se le presta mayor atención a dicha magnitud que las otras (NTCM, 2000), y además de ello, el abuso en la utilización de instrumentos estandarizados.

Lo anterior permite comprender, por qué el participante ha construido que dichos instrumentos estandarizados sirven para asignar un número a lo que se está midiendo, sin que se tenga claro que es lo medible del objeto y con

que puede ser medido, es decir, el hace uso, si se puede llamar así, de una medida formalizada; “asignar números” a una cualidad medible del objeto.

b. El contexto en la construcción de la medida.

Se puede inferir de las situaciones narradas de los contextos extraescolares, el participante tiende a relacionar la medida con aspectos religiosos, donde conjuga lo que está realizando con acontecimientos de la vida cotidiana. También cuando cuenta el uso que hace su madre de los instrumentos estandarizados en la escuela.

Posiblemente las escasas situaciones extraescolar vividas por el P.3 en la construcción de la medida, han hecho hasta el momento, que haya construido elementos superficiales de la medida, ya que como se observó en el apartado anterior, sólo emergen dos elementos necesarios para la construcción de la medida: la magnitud y la selección de instrumentos.

Otro aspecto que se infiere, es que la escuela le ha propiciado situaciones alrededor de la medida, pero relacionados con aspectos formales de la misma, se deduce esto porque el participante hace uso del metro para medir algunas magnitudes propuestas (masa, longitud) y comprende que la utilización del mismo le implica la asignación numérica sin prestar atención a la importancia de la utilización de la unidad. Al respecto Carpenter y Osborne (1976, citado en Dickson, 1991) señalan que casi todos los contenidos docentes parecen crear una regularidad perceptual y una pulcritud ( las soluciones de los problemas son números “redondos”) que brilla por su ausencia en las medidas del mundo real, y estos procesos impiden compresión del procesos de medición, llevando al estudiante a que conciba que la medida no es necesaria en el contexto donde se desenvuelve o que simplemente se hace uso de la medida cuando se hace de instrumentos estandarizados de medida.

c. El uso de representaciones semióticas en la construcción de la medida

En el análisis de las representaciones semióticas que se realizaron para esta investigación solo se pudo hallar información en el participante para dos registros: la cantidad de magnitud, utilizando dos tipo de representación: número natural y cuantificador indefinido y la unidad. Es necesario aclarar que para el análisis se utilizó sólo el lenguaje verbal.

En el caso de la cantidad de magnitud, hace uso de la representación del número natural, donde utiliza los instrumentos de medida estandarizados y corrobora que el instrumento sirve para aplicarle el número , veamos el registro: *"Echaría toda la tierra y después me indicaría ( la probeta) cuanto daría, 800 , el número 811".* En este hace uso de los números de contar o números naturales, aunque en la medida no utiliza la unidad para dar dicha apreciación, lo importante es la asignación del número.

Además de lo anterior, sugiere reflexionar que la utilización de números naturales se da por la tendencia de ver la medida como un valor discreto, y es claro que la medida atiende a valores continuos, ya que en la construcción de la medida está ligado la construcción de la unidad, donde el estudiantes puede percibir la naturaleza continua de las magnitudes.

En el contexto escolar es usual la utilización de problemas de medida para procesos de aritmetización, donde la medida es una excusa para trabajar actividades de tipo aritmético. Probablemente la utilización de este tipo de problemas puede ir en detrimento de la compresión de la verdadera naturaleza del proceso de medida (Dickson, Brown, & Gibson, 1991).

El uso de cuantificadores indefinidos fue frecuente en el modelo de justicia y el modelo hedonista. El uso de este registro permite comprender que en la edad en la que se encuentra el participante en el proceso de medida, la asignación de cantidad es más frecuente con el uso de cuantificadores que

el uso de números, ya que estos les permite mayor seguridad en los procesos de medición, por el uso de la estimación perceptiva, proceso necesario para el desarrollo de la estimación.

En alguno de los registros el participante indica que echaría cierta cantidad de arena en una caja y que cree que cabe toda, porque el cajón es grande y la arena es muy poquita: Aquí se nota como entran en juego procesos perceptivos (Godino D. Juan; Batanero C.; Font V., 2004) , ya que hace uso de la percepción para comparar tanto la cantidad de la arena como el espacio que había en la caja.

**Participante 4 (P.4)**

a. Modelos explicativos alrededor de la medida

Del análisis de los datos se infiere que en la solución de las situaciones el participante hace uso de los siguientes modelos explicativos: cuantitativo, justicia, religioso y hedonista, como se puede observar en la siguiente tabla.

| Modelo explicativo | I 1 | | | | I 2 | | | | | | I 3 | | | I 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | C | | | | J | | | R | M | | J | | | H | |
| Nº Pregunta | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| Cuantitativo | x | X | x | X | | | | | | | | | | | |
| Justicia | | | | | x | X | x | | | | x | x | x | x | |
| Mítico | | | | | | | | | | | | | | | |
| Religioso | | | | | | | | x | | | | | x | | |
| hedonista | | | | | | | | x | | | | | | x | x |

Tabla 10. Modelos explicativos P.4.

Hay tendencia en el participante a integrar el modelo de justicia con el religioso: en una de las soluciones de las situaciones argumenta que*" si la profesora no reparte toda la alcancía a los niños, el diablo le puede jalar las*

*patas, sosteniendo que el diablo existe* ", es decir el diablo es el encargado de hacer justicia frente a este hecho. En la historia de las medidas, esta es una de las creencias que se tiene alrededor del proceso de medición, elemento particular en las culturas, aún más de la que provienen de la religión católica (Kula, 1999) .

En la explicación a la solución presentada de las situaciones de medida mediante el modelo de justicia, surgen los elementos: distributivo y principios de igualdad. A continuación el registro refleja la justica desde principios de igualdad en proceso de medida:

> *"No estoy de acuerdo con Sofía, porque a los otros les tiene que dar lo mismo que a Sofía". …." Ella ayudo más no importa, todos estaban en la fiesta entonces les tiene que dar lo mismo" (P.4)*

En este relato ella explica que la repartición de la comida para una fiesta debe ser igual para todos, sin importar quien haya aportado más dinero para la realización de la misma, observándose un modelo de justica por igualdad en la medida.

En otra situación se pide repartir unos alimentos entre varios estudiantes, y el participante propuso: *"el pan se lo doy a Daniel, el suspiro para Manuel, la cocada para Ivón y la lengua para mí"*. En tal registro se esperaría escuchar que repartan cada objeto comestible en 4 para que a cada uno le toque lo mismo, pero en realidad la forma de hacerlo es para favorecer el gusto de cada compañero, es decir hay un proceso de justicia distributiva, porque a cada uno le dio de acuerdo a sus gustos.

Otro elemento de integración surgió entre el modelo religioso y el modelo Hedonista. El participante sugiere que hay hechos y acciones que pueden ser medibles: la grosería, la maldad, el placer y además pueden ser relacionados con aspectos religiosos: "*había un niño que le gritaba mucho a*

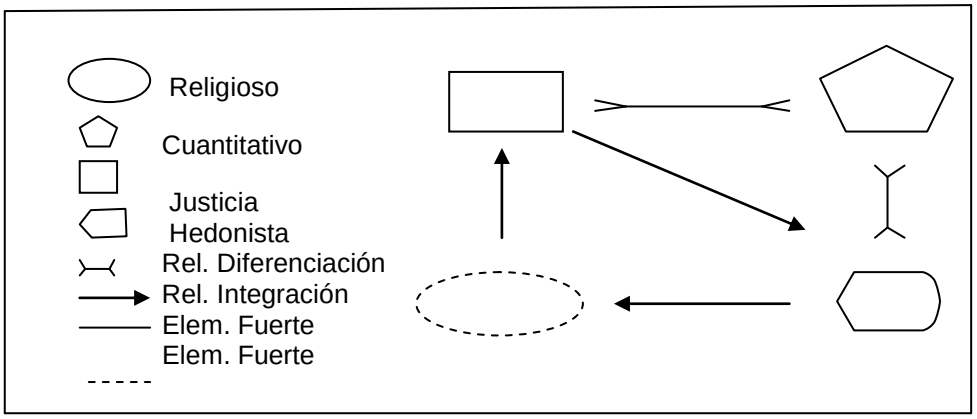
*la mamá y le decía* muchas groserías*, entonces llegó media noche y entonces se lo llevó el diablo a media noche y le jaló las patas*".

En la transcripción el elemento "muchas groserías, le gritaba mucho", hace referencia a hechos que mide, que el participante valora; la magnitud es el grito, la grosería y el valor de dichas magnitudes es asignada a través de cuantificadores. Si estos datos se analizan desde aspectos epistemológicos de la matemática no son posibles, ya que como primera condición no se puede abstraer de dichas magnitudes el concepto cantidad, porque este sería relativo al sujeto que expresa el valor. Si se comparan dos cosas de igual valor como decir Julián es muy grosero, Pedro es muy grosero, de tal comparación no se podría establecer que ser muy grosero, sea el mismo valor para dos sujetos que hacen dicha apreciación de las personas mencionadas.

Por tal motivo ese tipo de registros está vinculado con el modelo hedonista porque se asigna valores a propiedades que no son magnitudes, además de eso relaciona el hecho con el modelo religioso, y esto justamente es como compararlo cuando en la antigüedad se creía que si se pecaba mucho, el alma ocuparía un lugar en el infierno (Kula, 1999).

En el modelo cuantitativo se hace referencia a la utilización de los instrumentos y a la asignación de números. El participante ha construido una visión instrumental de la medida (Figueiras Ocaña, 2002), ya que en las unidades de análisis la utilización del metro, la probeta y la gramera, permite asignarle número al objeto de medida. Esto lo hace evidente cuando afirma: *"este sirve porque tiene los números (gramera) y este también (probeta)", "el metro (lo utiliza para medir el tiempo), midiendo y contando los números, señalándolo"*. Este modelo no lo integra con ningún otro modelo, se observa una visión instrumental de la medida.

En la siguiente gráfica se observa la integración que se da entre los diferentes modelos explicativos; además de ello se puede inferir que por los datos analizados, los modelos fuertes en las explicaciones del participante son: cuantitativo, justica y hedonista, que surgen con frecuencia en las situaciones de medida.




Gráfica 7. Relación modelos explicativos P.4

En la solución de las situaciones de medida no sólo se evidenciaron los modelos explicativos que utiliza el participante, sino también algunos elementos de los cuales hace uso durante el proceso de resolución: la magnitud, el conteo, la selección de instrumentos, la apreciación del rango de magnitud. Estos son elementos que ha ido incorporando al modelo mental de medir, y que le son útiles para dar solución a las situaciones presentadas.

Al observar los diferentes objetos que se le presentan para ser medidos, el participante escoge en cada uno de ellos lo que posiblemente se puede medir; además de ello lo relaciona con un instrumento de medida estandarizado, haciendo relación con situaciones de su vida cotidiana: *este (la probeta) sirve para medir la leche, porque mi tía vende leche. El* participante tiende a identificar las magnitudes que culturalmente son asumidas en su contexto (la masa, la longitud, la capacidad) y relacionarla

con ciertos instrumentos, aunque en algunos casos el instrumento es escogido por poseer números:

> *"¿Qué instrumentos utilizarías para medir la cantidad de arena?*
>
> *Este (gramera), ese (balanza) o éste también (jarra),*
>
> *¿Por qué?*
>
> *Porque tiene los números ". (P.4)*

En el fragmento anterior se seleccionan algunos instrumentos para medir la arena, pero no es claro que se pretende medir de la arena, porque tanto la balanza como la gramera sirven para medir la masa pero la jarra no le permite hacerlo; finalmente argumenta que estos les sirven porque tiene números; se podría inferir del registro que lo que se quiere es asignarle números a lo que está midiendo, sin ser clara la magnitud, es decir la cualidad medible del objeto, en este caso la masa.

Algo particular en los datos es que para asignar el número no hace uso de unidades bien sea patrones o unidades estandarizadas, elemento que permite concluir su tendencia a que el medir hace referencia a la asignación de números y que los instrumentos estandarizados le permiten dicha asignación. Puede ser que esta relación lo lleve a utilizar el conteo como estrategia de medida ya que éste tiene que ver con contar las acciones que se realizan en la medición. En una de las situaciones el participante utiliza el metro para calcular el tiempo que se demora en recorre cierta distancia, pero se puede inferir que el metro le sirve es para registrar los pasos que va dando durante el recorrido, porque en la observación del video el número de pasos dado es que finalmente señala en el metro.

Durante este proceso surgen procesos perceptivos, que le permite concluir el tiempo que se puede demorar recorriendo un espacio dado, la cantidad de arena; aunque no son muy útiles porque lo que hace el participante es dar

valores numéricos bajo el proceso de la percepción, dicha proceso debe llevar a los niños a desarrollar procesos que comparación y construcción de referentes que le permitan ser consistentes en sus medida.

b. El contexto en la construcción de la medida

La cultura juega un papel primordial en el desarrollo de la medida, porque a través de ella se han construido diferentes paradigmas que se tienen alrededor de la misma, así como la aparición de un sistema de prácticas alrededor de ella; la construcción de la medida ha estado vinculado a proceso del desarrollo de la sociedad tanto científica como del común.

Se observa en los registros la transferencia que hace el participante entre las situaciones de la vida real (situaciones extraescolares), con las situaciones propuesta en los instrumentos, que son situaciones evocadas (Font, 2006a, 2006b, 2007) donde presenta una descripción escrita de una situación real; en este proceso de transferencia se ve reflejada la influencia que ha tenido el contexto de su hogar y su familia para construir un modelo explicativo de medida de carácter religioso por las historias que cuenta relacionada con un personaje simbólico de la Biblia: el Diablo.

Lo anterior se puede justificar con una cita de Bishop ( 2005), donde el argumenta: *"Una nueva idea es significativa en la medida en que se conecte con el conocimiento presente del individuo…...Por último y quizás más importante, puede conectarse con el conocimiento individual de situaciones de la vida real"*. Dando continuidad a la reflexión anterior se presenta el siguiente registro:

> *"Estos sirve para pesar las frutas (refiriéndose a la gramera), porque donde doña Adíela hay una de estas".*
>
> *El metro sirve para pesar niños, los ponemos ahí derechitos y los pesas….se paran y le ponen el metros (hace la demostración de cómo pesan los niños).*

*Este sirve para medir la leche (se refiere la probeta), porque mi tía tiene uno se esos, ella vende leche. Hecha la leche, entonces mira cuanto le dio la leche, entonces dice cuanto tiene que pagar".*

Posiblemente las situaciones de la vida cotidiana, le han permitido al participante construir diferentes elementos de la medida. Entre ellos están: la existencia de diversos instrumentos de medida para cada una de las magnitudes y la asignación de valor numérico después del proceso de medición. El participante 4 aún no se hace uso comprensivo de los instrumentos de medida, pues piensa que cualquier instrumento le puede servir para valorar las magnitudes, pero evoca situaciones de la vida cotidiana donde los ha utilizado.

En los protocolos no se hace explícito alguna situación vivida en la escuela alrededor de la medida, eso se puede dar por la brecha que existe entre las matemáticas que se explican en la escuela y las que las personas hacer servir en su vida cotidiana (Diez Palomar, 2000), pero se puede decir que la escuela ha incidido en el participante en la construcción de una medida donde lo que interesa es la asignación de un número a una cualidad medible del objeto, por la tendencia del participante de asignar números, puede que dicha tendencia también sea resultado de los contextos extraescolares , pero posiblemente la escuela esté soportando dicho modelo, ya que allí se le da mayor importancia a las matemáticas formales, que a las matemáticas de la vida cotidiana y lo sostiene Font ( 2006) cuando sugiere que "*las matemáticas informales e idiosincrásicas son las dominantes en la resolución de problemas en la vida cotidiana en el mundo laboral, mientras que las matemáticas formales son las predominan en la escuela".*

c. El uso de representaciones semióticas en la construcción de la medida

De los cuatro registros propuestos para el análisis: cantidad de magnitud, tipo de magnitud, tipo de unidad, sistema métrico, sólo surgen dos registros en el lenguaje verbal del participante 4: cantidad de magnitud y tipo de

Magnitud. El registro cantidad de magnitud es frecuente encontrarlo en el modelo cuantitativo.

En este registro se hizo uso de tres representaciones semióticas: número natural, cuantificador indefinido y cuantificador partitivo. Fue recurrente el uso del cuantificador indefinido en el participante 4, como producto de la utilización de procesos de comparaciones o estimaciones llamadas cualitativas, que son previas a la asignación numérica, elemento particular en los niños (M.E.N, 1998). Está también el uso del número natural o números de contar, ya que este tipo de representación le permite al estudiante asignar números a las variables discretas y se aplica a las situaciones en las que cada una de las unidades individuales que hay que contar es una entidad distinta y separable, con asignación de un número o un conjunto.

El elemento anterior es obstáculo para el aprendizaje de la medida ya que todas las magnitudes no son posibles medirlas con unidades individualmente indistinguibles, debido a que se utiliza como se mencionó anteriormente a procesos de conteo; claro está que la tendencia de utilizar patrones en la medida que pueden ser reiterados, son susceptibles de ser contados mediante números naturales y esto parece ocultar el carácter continuo de las magnitudes.

Otra representación semiótica que se analizó es el uso del cuantificador partitivo “mitad”, que le es asignado a una cantidad desconocida de la cualidad medible del objeto. Lo anterior no indica que se estén midiendo variables continuas, variables que se dan por la utilización de unidades cada vez más refinadas, si no por el contrario, el participante está realizando procesos de estimación ordinal, prenumérica o cualitativa (M.E.N, 1998), que le permiten expresar la cantidad de materia mensurable, este que es crucial para seleccionar la unidad y el proceso adecuado de medición de acuerdo a la situación presentada.

En la siguiente tabla se presenta el ejemplo de cada una de las representaciones utilizadas.

| Número natural | Cuantificador indefinido | Cuantificador Partitivo |
|---|---|---|
| Hay 88 arenas, 100 arenas. | Porque me cupo **toda** la arena.<br>Me sobró **más**. | Porque hay la **mitad** de la bolsa. |

Tabla 11. Representaciones semióticas.

Otro de los registros utilizados fue tipo de magnitud y la única representación que se observa es la magnitud concreta, que hace referencia a las cualidades medibles de los diferentes objetos. El participante para referirse a la masa habla de las cualidades: las frutas, la arena; en la capacidad se refiere a la leche, al agua. Este fenómeno es comprensible porque la construcción de la magnitud tiene que ver con procesos de abstracción (M.E.N, 1998) que son complejos en la medida, ya que no es sencillo pasar de la construcción de una magnitud intraobjeto que depende mucho del objeto a medir, a magnitud intraobjeto que no depende del objeto a medir.

De acuerdo con Duval (citado en Godino, 2003) *la diversidad de las representaciones de un mismo objeto aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y por tanto sus representaciones mentales*, por lo tanto es necesario que en los proceso de enseñanza se le propicien al participante mas representaciones semióticas que le permitan comprender el proceso de la medida.

**Participante 5**

a. Modelos explicativos alrededor de la medida

En la solución de las diferentes situaciones, el participante hace referencia a varios modelos explicativos de la medida, tales como el cuantitativo, el de justica y el religioso; integrando elementos de diferentes modelos para

explicar las situaciones presentadas. En la siguiente tabla se presenta los moldeos presentes en sus explicaciones

| Instrumento | I 1 | | | | I 2 | | | | | | | | | | I 3 | | | | | | I 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Modelo | C | | | | J | | | R | | | C | | M | | M | R | J | | | | H | |
| pregunta | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 |
| Cuantitativo | X | x | x | x | | | | | | | | x | | | | | | | | | | x |
| Justicia | X | | | | x | x | x | | x | | | | | | | | X | x | x | | x | x |
| Religioso | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Mítico | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Hedonista | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Tabla 12. Modelos explicativos P.5

Los modelos explicativos relevantes en el participante 5 fueron el cuantitativo y el de justicia como se puede observar en la tabla anterior. Entre ellos existe tendencia a integrarse puesto que el hecho de realizar una medida aproximada está enmarcado en un proceso de igualdad, que es una concepción de justicia. En una de las situaciones propuestas (instrumento 4), se le pide repartir cierto líquido entre sus compañeros y propone que para que a todos les toque igual se puede hacer al cálculo, obsérvese:

> *"al cálculo, midiendo, echando un poquito, un poquito, hasta que más o menos los tres queden con lo mismo". (P.5)*

En esta situación se ve como ella aplica la medida relacionándola con procesos de justicia, donde la asignación de cantidad "poquito" es la unidad que utiliza para realizar la medida, es decir pareciera que a todos les debe echar cierta cantidad de poquitos en el vaso para que todos tomen la misma cantidad de líquido. No se hace uso del proceso exacto de la medida, sino de una aproximación de la misma, porque lo que se pretende es ser justo frente a la repartición realizada.

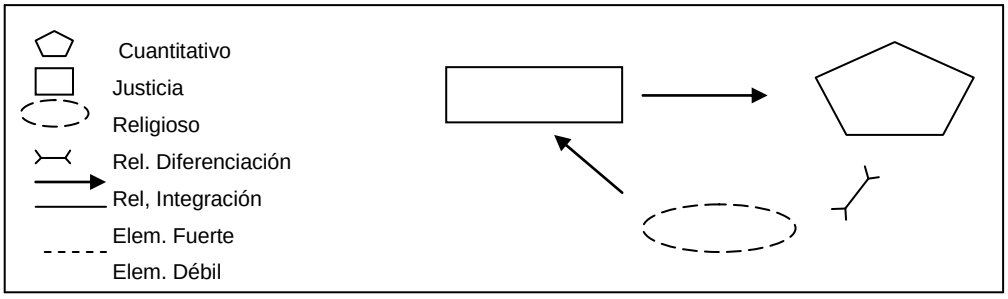
En el modelo anterior se puede ver como la medida es permeada por hechos sociales que son justos. En la historia de las medidas se buscaba que éstas fueran exactas para evitar que los señores feudales se aprovecharan de las comunidades (Kula, 1999), buscando con ello la pesa justa, la "justa medida".

Hay otros elementos que se integran al modelo de justicia y es el modelo religioso, dejando ver el participante que habrá alguien que hará justicia por realización de medidas injustas, ya que explica que bajo hechos justos o injustos habrán premios y castigos, aspecto religioso que se cita en Kula (1999) cuando se refiere a la creencias de diferentes comunidades que aceptan la existencia de un juicio final; en la Biblia en el Libro de Moisés se habla de esto cuando se hacer referencia a las usuras: *"Tened balanzas justas, pesos justos……para que se alarguen tus días sobre la tierra que Yavé tu Dios te da".*

Es necesario aclarar que en el modelo de justica surgen dos subcategorías: la interpretación de la medida con principios de igualdad o la medida bajo principio de distribución. Tales subcategorías son utilizadas por el participante 5 en sus explicaciones, existe la tendencia a dar explicaciones más desde lo distributivo que desde lo igualitario, porque desea privilegiar al menos favorecido en procesos de justica. En una de las situaciones propuestas donde se pretende repartir una herencia entre cinco hijos, el participante 5 sugiere repartir la herencia de acuerdo a las necesidades económicas de cada hijo, buscando con ello favorecer a los hijos más necesitados económicamente.

En las situaciones que se presentaron para el modelo hedonista no surge este elemento, pero si surgen elementos relacionados con la justicia y la cuantitativo de la medida. En la siguiente gráfica se puede observar la fuerza

del modelo de justica y el cuantitativo en el participante; cosa contraria sucede con el modelo religioso.




Gráfica 8. Relación de modelos explicativos P.5

Durante la solución de las situaciones de medida, surgieron elementos necesarios para la construcción de la medida: la magnitud, la utilización de unidad, la utilización de los instrumentos de medida, y la estimación.

De los datos se infiere que el participante comprende cuales son las características medible de los objetos, porque considera señala lo que puede ser medible, en este caso la masa, la longitud, la capacidad, el tiempo; se puede decir que relaciona la magnitud con el número, asignándole a dicha magnitud una unidad , pero lo extraño es que su comprensión de la unidad es superficial , es una comprensión instrumental (Diez Palomar, 2000), porque se refiere a los símbolos que constituyen el lenguaje de la misma (centímetro cúbico, centímetro, gramos, mililitros).

En uno de los protocolos enuncia: *"Esto es para cm³ y los cm³ sólo son para líquidos……Yo no sé bien lo que es un cm³ o cuanto tiene un mililitro, pero los dos, ambos son para líquidos"*(P.5). Vemos aquí como dicha compresión le permite aplicar las reglas formales para la utilización de la unidad en una determinada magnitud, lo que formalmente se encuentra en los libros de

texto *“para los líquidos se utilizan los cm³ o mililitros, para la longitud el cm, metro “*.

Otro elemento es la ausencia de la apreciación del rango de unidad que le permite seleccionar el instrumento de medida que será eficaz en su proceso, ya que el participante 5 precisa que el metro se utiliza para los centímetros, cuando en realidad el instrumento, de acuerdo con la apreciación de rango de magnitud, es la regla.

Muy posiblemente esa comprensión instrumental que ha construido para la medida, sea producto de la acción de la enseñanza, puesto que en términos de Godino (2003) las matemáticas instrumentales:

- Son usualmente más fáciles de “aprender”, es más fácil enseñarle al estudiante que los cm³ son para los líquidos, que esperar que se vaya dando ese proceso de construcción de la unidad para cada magnitud.
- Permiten proporcionar la respuesta correcta de manera rápida.

Finalmente lo que pretende el participante al realizar el proceso de medición, es asignar un número que indica el instrumento de medida escogido para dicha magnitud acompañado de su unidad correspondiente; se infiere la construcción instrumental, formal, que se ha elaborado de la medida, debido a que lo que se pretende es el seguimiento de reglas que permiten arrojar el valor de la medida.

Un elemento esencial para la construcción de la medida es el proceso de estimación (Dickson 1991, M.E.N 1998, Chamorro 1991, 2001, 2003 y Godino, Batanero & Roa 2004), porque este permite arrojar la medida sin la utilización de instrumentos, además nos permite analizar la pertinencia de los patrones, unidades o instrumentos de medida que utilizamos para medir.

En la construcción de este proceso el participante presenta obstáculos, ya que los sistemas de referencia de las diversas magnitudes construidas en

sus estructuras cognitivas no le aseguran éxito durante el proceso, puesto que su aproximación entra en un margen de erro muy amplio: por ejemplo, aproxima que hay *"dos kilos y medio en la bolsa",* cuando en realidad hay cuatro kilos.Ese valor aproximado que da es una mala estimación.

Otro caso es el de la estimación del tiempo: el participante argumenta que para estimar el tiempo es buena porque utiliza mucho el reloj y sabe que los segundos son pausados, pero en el momento de la estimación se desfasa, ya que estima que se demorará 30 segundo recorriendo un espacio y en realidad se demora 9 segundo, es decir, la utilización adecuada del instrumento no es indicio de un sistema de referencia potente para estimar el tiempo.

b. El contexto en la construcción de la medida

En los datos recolectados parece ser que en el participante la construcción mental que tiene sobre la medida no le permite relacionar las situaciones que se le presentan con contexto extraescolar, ya que son escasos las situaciones que narra donde haya utilizado la medida. En algún momento de los registros sostiene que poco utiliza la medida en su vida cotidiana y posiblemente se de esta explicación porque en el contexto extraescolar no hace uso de instrumentos de medida estandarizados, por lo tanto se puede inferir que para el participante 5 medir implica hacer uso de dichos instrumentos. Esta es una visión instrumental de las medidas como lo llama Figueiras (2002); medir suele asociarse en nuestra cultura con una acción de tipo instrumental: cintas métricas, reglas o balanzas.

Hace mención que usa la medida pero no exacta, es decir una medida aproximada:

> *"Por decir algo, lo que más se utiliza en medidas en mi casa es para la cocina, pero se hace como al cálculo, por la experiencia, ya por la costumbre, no se hace una medida exacta para hacer el arroz."*

Obsérvese que está utilizando un tipo de medida informal que le permite resolver una situación propia de su cotidianidad. Este tipo de medida debe integrarse a la medida formal; ambas deben complementarse mutuamente y en virtud de dicha integración recoger los distintos valores socioculturales del espacio en el que se han construido y desarrollado (Gutiérrez Penagos, 2006), buscando con ello procesos de alfabetización matemática (Diez Palomar, 2000) que permitan al estudiante integrar las matemáticas que ha construido en la escuela con las matemáticas que usa en su vida cotidiana .

Los aspectos culturales y sociales son potentes elementos para el aprendizaje de las medidas; también nos permiten comprender que determinados hechos, acciones y soluciones que le damos a situaciones de medida, están permeados por dichos valores. En una de las situaciones se proponía repartir una herencia entre 5 hijos analizando ciertas condiciones económicas de cada hijo; en la discusión dada por el participante 5 sostiene durante su solución que sea repartida de acuerdo con las necesidades económicas de los hijos.

Desde contextos puramente matemáticos si se analiza dicha solución puede decirse que el procedimiento seguido es incorrecto , por el hecho que es una división entre el dinero y la cantidad de hijos, pero hay elementos sociales que hacen que no se lleve dicho proceso, es decir, los procesos de medición en la vida real no son en abstractos, bajo elementos puramente racionales y formales, sino que dichos procesos están sujetos las interacciones sociales y culturales que se den; Figueiras ( 2000) narra un hecho similar cuando en los manuscritos árabes se hacía referencia a la repartición de herencias entre familias , muchos científicos decían que dichas reparticiones estaban mal realizadas porque no correspondían a las reglas matemáticas, pero indagando sobre su cultura se pudieron dar cuenta que dependiendo del sexo y del orden de nacimiento de los hijos , se tenía derecho a cierta cantidad de dinero. Se constata entonces cómo la medida surge de la

construcción social de las diversas culturas (Kula 1999, Figueiras 2000; Bishop 1999, 2005; Gutiérrez 2006).

c. El uso de representaciones semióticas en situaciones de medida

En la solución de las situaciones se analizaron los siguientes registros: cantidad de magnitud, tipo de magnitud, tipo de unidad, sistema de medida.

Para el caso de la cantidad de Magnitud la representación que utilizo con más frecuencia fue el uso de cuantificadores indefinidos, y es normal que surja dado que en varias de las situaciones no era necesaria la asignación numérica. También utilizó el número natural, aspecto que es obstáculo para el desarrollo de los proceso de medición, porque es la pretensión del participante 5 capturar lo continuo, la magnitud con lo discreto, números naturales (M.E.N, 1998).

Surge otra representación semiótica: el número decimal. El participante ha empezado a captar la naturaleza continua y aproximada de la medida, ya que el uso de números de contar o números naturales tiene la desventaja de promover un carácter discreto y exacto de la medida.

El tipo de magnitud del cual hace uso, es la magnitud concreta porque abstrae en cada objeto y situación planteada la cantidad susceptible de medición: *"con el metro yo puedo medir el perímetro, el largo del salón, la altura de un tarro, la altura de mi cuerpo" (P.5)*, se puede deducir que todavía no logra fundir todas esas magnitudes concreta en la magnitud abstracta como sería en este caso la longitud.

El tipo de unidad que utiliza en las representaciones de su lenguaje verbal es la unidad abstracta o unidad propiamente dicha, porque el participante logra abstraer una misma unidad para todos los objetos, en el caso del líquido sostiene que los $cm^3$ se utilizan para los líquidos, es decir la unidad que utiliza es una interfigural puesto que no depende en absoluto del objeto a

medir; se puede concluir esto de las magnitudes que fueron utilizadas en las situaciones( masa, tiempo, longitud, capacidad, dinero).

Por último el tipo de sistema de medida que se implementó fue el sistema convencional, el uso de este tipo de representación no indica la comprensión del mismo, porque se da uso instrumental, formalizado de dicho sistema; es decir se aplican ciertas reglas necesarias: el metro sirve para las longitudes y se da en centímetros, la probeta sirve para los líquidos y se da en $cm^3$.

En las observaciones realizadas se puede inferir lo propuesto por Duval (1995, citado en Godino 2003), el uso de diversos registros semióticos no indica que se comprenda el objeto matemático, es decir, en matemáticas no puede haber comprensión sino se distingue un objeto de su representación. Lo anterior sucede en el P.5, debido a que hace uso de diversas representaciones pero el uso de algunas de ellas las hace por la formalización de la medida, producto de los procesos de enseñanza.

A continuación da ejemplo de cada registro semiótico:

| Registro semiótico | | Datos |
|---|---|---|
| Cantidad e magnitud | Número natural | "la jarra tiene **16** centímetros de largo, tiene **33** centímetros de ancho en la parte de abajo y **44** centímetros en la parte superior" |
| | Cuantificador indefinido | "Los que tienen **más** capacidad son estos" |
| | Número decimal | "Tiene **dos kilos y medio**" |
| Tipo de magnitud | Magnitud concreta | " Este ( metro ) se utiliza para medir **el perímetro**" |
| Tipo de unidad | Unidad Abstracta | "la jarra tiene 16 **centímetros** de largo, tiene 33 **centímetros** de ancho en la parte de abajo y 44 **centímetros** en la parte superior" |
| Sistema de media | Convencional: utilización del sistema métrico | "la jarra tiene 16 centímetros de largo, tiene 33 centímetros de ancho en la parte de abajo y 44 centímetros en la parte superior" |

| | | |
|---|---|---|
| | decimal | |

Tabla 13. Representaciones semióticas

Obsérvese en la tabla anterior como un solo dato tiene varios registros semióticos, pudiéndose inferir lo que dice Duval (1999): “las representaciones semióticas son necesarias para el desarrollo de la propia actividad matemática”

**Participante 6**

a. Modelos explicativos alrededor de la medida

En el análisis de los datos se encontró el uso que hace de siguientes moldeos explicativos: cuantitativo, justicia, religioso, además de las integraciones que se dan entre algunos modelos cuando aborda las diferentes situaciones presentadas. En la siguiente tabla se puede observar la frecuencia con que aparecen dichos elementos en los instrumentos aplicados.

| | I 1 | | | | I 2 | | | | | | | | | | I 3 | | | | | | I 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Modelo | C | | | | J | | | R | | | C | | M | | M | R | J | | | | H | |
| pregunta | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 |
| Cuantitativo | x | x | x | X | | | | | | | x | | | | | | | | | | x | x |
| Justicia | | | | | | x | x | x | | x | | x | | | | | x | | | x | x | x |
| Religioso | | | | | | | | | | | | | | | | x | | x | x | | | |
| Mítico | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Hedonista | | | | | | | | | x | | | | | | | | | | | | | |

Tabla 14. Modelos explicativos

Se infiere la integración que se da entre el modelo de justicia -religioso, entre el modelo religioso-cuantitativo y cuantitativo- justicia, hedonista-

religioso. La integración hedonista-religioso-justicia hace referencia a la medida de las actuaciones que se tienen en la tierra para luego ser juzgado en el juicio final, donde se aplica el dicho popular “con la vara que mides seres medido”:

> *“Estoy de acuerdo, pues uno solo debe cobrar lo necesario y como dice el estribillo “con la varita que midas, será medido” si queremos progresar debemos obrar bien al sitio que vayamos”. (P.6)*

En el registro pareciera que hay integración entre esos tres modelos, porque se pretende medir aspectos como “las acciones” que no son medibles desde las matemáticas; un proceso de equilibrio entre el bien y el mal, que tiene relación con la balanza símbolo de la justicia, pero también símbolo en pasajes religiosos cuando se habla de tener pesas justas.

En la integración cuantitativo – justicia, lo que se pretende es la justa medida pero analizada desde aspectos igualitarios de la misma, donde estos tiene relación con la exactitud al medir: *“Estoy de acuerdo, porque si todos aportaron para la gaseosa, se les debe dar igual cantidad y que mejor en un recipiente que contenga rayas o deje ver la cantidad que se deben tomar, para que no hayan disgustos.”* (P.6). En este registro se infiere la necesidad de un objeto con características similares a una probeta, para asignar la misma cantidad a cada uno, además porque dicha repartición exacta evitará que hayan disgustos. En la historia de la medida, Kula (1999) hace referencia a dicho paradigma cuando expresa la necesidad de construir un sistema de medida perfecto evitando con ello el engaño a las comunidades.

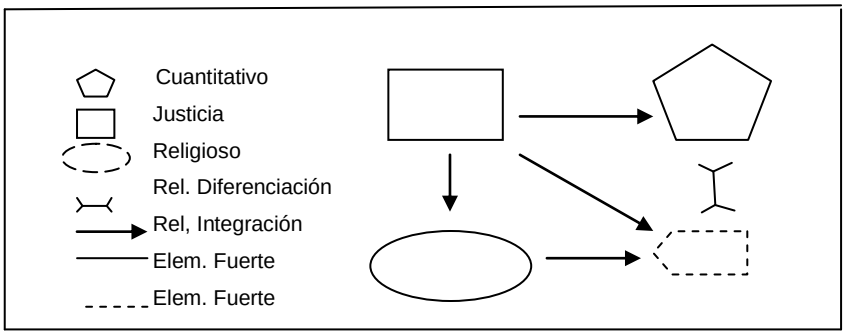
La solución dada a la siguiente situación es un elemento importante para ser analizada: “Se tiene los siguientes 4 objetos comestibles. Explica como repartirías dicho objetos entre tus compañero y tu.”

La solución de la situación por parte del estudiante fue dividir cada objeto comestible entre cuatro, para que a todos les tocara la misma cantidad,

siendo particular lo sucedido, puesto que ninguno de los entrevistados propuso ese proceso para dicha repartición, este tipo de procedimiento es propio de la regla de la división en las matemáticas.

Cuando el participante hace uso de la medida bajo explicaciones cuantitativas, se refiere a la necesidad de la exactitud en el medir, el uso de instrumentos de medida y la asignación de valores a la cantidad de magnitud. En el caso del modelo de justica surgen explicaciones desde principios de igualdad y principios de distribución; en algunas ocasiones analiza la medida "igual para todos y en otros la medida debe beneficiar al menos favorecido".

Se puede concluir que el participante 6 tuvo tendencia a integrar diferentes modelos para dar explicación a las situaciones presentadas. Obsérvese la gráfica




Gráfica 9. Relación de los modelos explicativos

Dentro de las explicaciones dadas para cada una de las situaciones propuestas surgen elementos necesarios para la construcción de la medida: la magnitud, la unidad, la selección de patrones, unidades e instrumentos, la apreciación del rango de magnitudes y la estimación.

El participante hace uso desde dichos elementos, pero particularmente se evidencia su comprensión en la magnitud de masa y tiempo; posiblemente se de esto por su la relación con el trabajo que realiza y la práctica de un

deporte, estos elementos le permiten relacionar lo que ha construido en la escuela y lo que hace fuera de ella.

Chamorro (2003), al respecto resalta que es necesario enseñar en la escuela las magnitudes que son socialmente aceptadas, y estas les ayudaran a comprender las otras magnitudes, ya que lo que se pretende es el aprendizaje de los elementos que giran alrededor de la medida: la magnitud, la unidad, la estimación, la construcción de los sistemas de medida, entre otros.

Alrededor de las dos magnitudes antes mencionadas se observó el uso adecuado de los instrumentos que le sirven para obtener la cantidad de magnitud, también arroja resultados en procesos de estimación muy cercanos al arrojado por el instrumento de medida, pudiéndose concluir que en sus estructuras cognitivas ha construido sistemas de referencia que le permiten indicar la cantidad de magnitud, es decir, dichos sistemas de referencia son confiables para la medida en masa y tiempo.

Dicho proceso de estimación también le permite seleccionar el instrumento de medida adecuado de acuerdo a la apreciación del rango de magnitud que se hace previamente y la asignación de la unidad correspondiente.

A continuación se presenta un registro donde hace uso de la estimación para capturar la cantidad de magnitud:

> *"(Utilizando sus manos para realizar la estimación de arena) en la bolsa tiene cuatro kilos de arena, al tomarlo con la mano me recuerda la medida de la papa, (decide utilizar la gramera dos: mayor capacidad), porque es el oportuno, porque uno llega hasta libra y la otra hasta kilos, (en el resultado de la medida efectivamente le dio 4 kilos)". (P.6).*

Obsérvese como su proceso de estimación es preciso, se podría suponer que comprende el objeto matemático medida, porque durante la aplicación del proceso del medir obtuvo la cantidad de magnitud. Sin embargo dicha comprensión es de tipo instrumental (Skemp, citado en Godino 2003), porque

hace aplicación de unas reglas propias de la media, ya que por su vinculación con el trabajo el participante sabe que la masa se da en gramos o kilogramos , o que el tiempo se da en segundos o minutos, pero sin comprender por qué la masa es una cualidad medible del objeto o por qué se utilizan dichas unidades para ser medida. Tal tipo de comprensión también es relacional (Skemp, citado en Godino 2003) porque permite comprender no sólo qué regla se puede aplicar sino también por qué es necesario aplicar dichas reglas.

Igual sucede con las magnitudes pocos usuales en su vida cotidiana, en este caso la capacidad , ya que utiliza reglas para hacer el proceso de medición. Ejemplo de ello es que enuncia que los líquidos se miden en una probeta y se utilizan los mililitros, esto se puede dar por efectos culturales, y sociales, ya que en ninguno de los registros deja ver el por qué "la capacidad" expresa ciertas propiedades que la hace medible (Díez Calzada, 1993). Posiblemente los líquidos los mide el participante porque es una magnitud socialmente aceptada y no porque comprenda que dicha magnitud tiene ciertas propiedades que la hacen medibles.

Dado lo anterior se puede decir que el uso de dichos elementos propios de la medida, el cual los realiza con eficacia el P.6, no nos puede llevar a concluir que en realidad comprende el objeto matemático medir, sino mas bien que hace uso de técnicas , algoritmos, procedimientos y que los comprende , es decir, durante la construcción de la medida se le da mayor fuerza a lo procedimental de la medida que comprensión de dicho objeto matemático. Esto puede ser producto por la misma visión que se tiene de las matemáticas: ser un conjunto de técnicas sin sentido.

b. El contexto en la construcción de la medida

En los registros analizados se encontró la influencia que han ejercido aspectos culturales en el participante 6 para construir sus moldeos

explicativos, como es el caso del modelo religioso, donde él narra situaciones relacionadas con la medida en las cuales él cree: el juicio final.

El contexto extraescolar que hace explicito el participante 6, donde él narra su vivencia en la tienda, y lo que ha aprendido en dicho trabajo, es decir, la práctica, le ha permitido construir sistemas de referencia como por ejemplo para la medida de la papa, el tomate, el frijol, el tiempo, sin la utilización de un instrumento de medida, sistemas de referencia necesarios para la construcción de los procesos de estimación (Godino D. Juan; Batanero C.; Font V., 2004).

Podría concluirse que el contexto extraescolar ha favorecido el desarrollo de una comprensión instrumental de la medida, ya que los procedimientos que él utiliza son necesario para su trabajo. Los contextos de la vida cotidiana son elementos esenciales para la construcción de los objetos matemáticos , ya que estos ayudan a procesos de enculturación matemática, ( Bishop, 1999; Díez, 2000) a los procesos de alfabetización matemática; siendo necesario tener en cuenta las construcciones personales del sujeto, ya que hay significados compartidos de las verdades matemáticas.

c. Las representaciones semióticas en la construcción de la medida

Algo particular en el análisis, es el la utilización de diversos registros semióticos, la presencia de conversiones y tratamientos de las representaciones semióticas utilizadas. En términos de Duval (1999), el tratamiento se da cuando se traduce una representación de un objeto matemático a otra bajo un mismo registro semiótico; el proceso de conversión se da por la traducción de una representación semiótica de un objeto matemático a otra en diferentes registros semióticos.

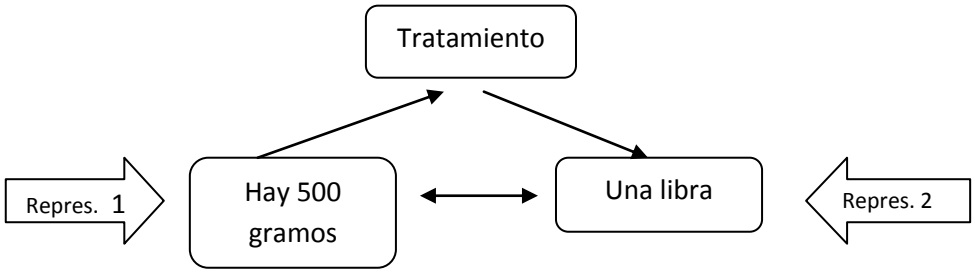
Una de las representaciones semióticas analizada es la cantidad de magnitud, y en tal registro hizo uso de número natural, cuantificadores

indefinidos, número decimal y cuantificadores partitivos. El uso de número natural y el número decimal se utilizo durante la modelo cuantitativo; el uso de cuantificadores indefinidos surgieron durante la aplicación de los diferentes instrumentos; el cuantificador partitivo emergió débilmente en los datos y fue cuando se usó la expresión "la mitad". El uso del número natural en variables continuas como los son la masa, el tiempo la longitud, la capacidad en los registros indica la necesidad que tiene el participante 6 de capturar lo continuo con los discreto.

Hace uso de una magnitud concreta, debido a que se refiere a cada una de ellas por sus características. Por ejemplo, para referirse a la masa, que es una magnitud abstracta, habla de la cantidad de arena, la cantidad de tomates y no logra fundir todas esas magnitudes concretas en una magnitud abstracta.

En la utilización de la unidad utiliza dos representaciones: el patrón y la unidad concreta, ya que ella para utilizar la unidad concreta no se descentra del objeto a medir, es decir la unidad es todavía intraobjeto.

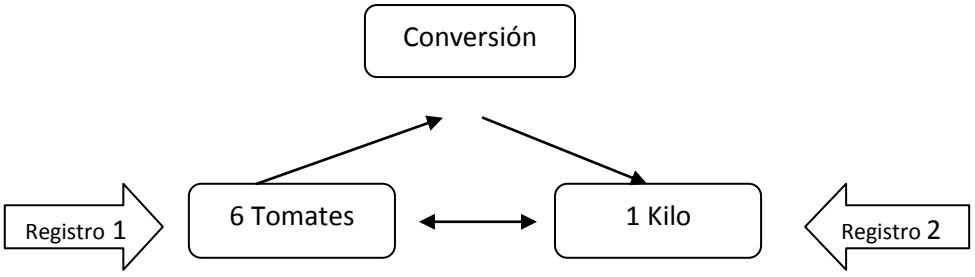
El participante hace uso de dos registros semióticos para el sistema de medida: sistema no convencional y sistema convencional, para dicho sistema hace tanto uso de procesos de tratamiento y de conversión. Obsérvese un ejemplo de tratamiento.



Se habla de una misma magnitud, en este caso la masa, y se está tratando bajo una misma representación, que es el sistema convencional de medida o como también es llamo sistema métrico decimal.

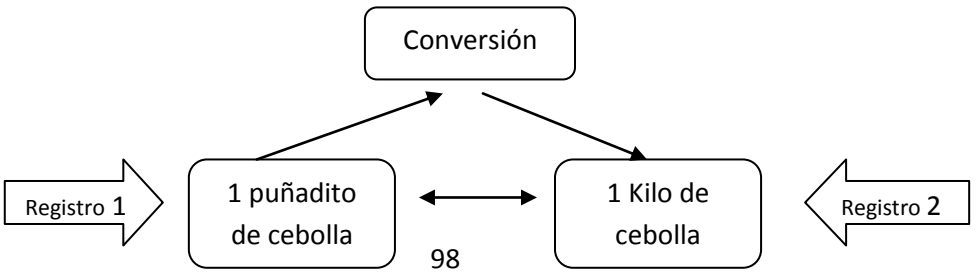
También se observaron proceso de conversión: *"en la bolsa de papa se vende por cuartillas y ella es equivalente a 4 kilos, y media cuartilla a dos kilos*". Se convierte la utilización de un sistema no convencional (la cuartilla), a un sistema convencional (los kilos), correspondiente a la masa; son dos registros semióticos diferentes para un mismo objeto matemático "la masa".

El siguiente ejemplo destaca el proceso de conversión porque se hace entre dos tipos de representaciones de registros semióticos diferentes:




En su discurso oral enuncia: *"seis tomates son equivalente a un kilo"*, que son dos registros diferentes. El primero es el uso de un patrón de un sistema de medida no convencional y el segundo registro es el kilogramo, utilizado en el sistema de medida convencional.

Otro ejemplo es el siguiente:



En este registro también existe un proceso de conversión, porque se pasa de un registro semiótico a otro, de un registro en un sistema no convencional a registro en un sistema convencional. Estos procesos de conversión favorecen la comprensión de los diferentes sistemas de medida, ya que el paso de un sistema de medida a otro es un proceso complejo. Kula (1999) al respecto señala, que para las comunidades no ha sido sencillo dejar de lado su propio sistema de medida convencional para adoptar un sistema de medida que no es propio de su cultura (sistema métrico decimal).

El uso de los diversos registros semióticos que utiliza el participante 6, le han permitido comprender la medida desde aspectos instrumentales, porque en conclusión, medir para él significa asignar un número a través de instrumentos estandarizados, que es solo un aspecto que hace parte de la construcción del objeto matemático: medir. También se resaltan los procesos de conversión y tratamiento que emergieron de los datos, ya que estos pueden facilitar el aprendizaje de la medida.

**Participante 7**

a. Modelos explicativos alrededor de la medida

De la tabla 14, se puede inferir que el participante 7 utiliza los siguientes modelos explicativos en situaciones de medida: el cuantitativo, el de justicia y el hedonista. Los datos permiten concluir que existe la tendencia a integrar los modelos cuantitativo y de justicia. Observe el siguiente cuadro:

| | I 1 | | | | I 2 | | | | | | | | | | I 3 | | | | | | I 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Modelo | C | | | | J | | | R | | | C | | M | | M | R | J | | | | H | |
| Pregunta | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 |
| Cuantitativo | X | x | x | x | | | x | | | | x | x | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Justicia | | | | | x | x | x | | | | | | | | | x | x | x | x | x | x |
| Religioso | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Mítico | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Hedonista | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | x | x |

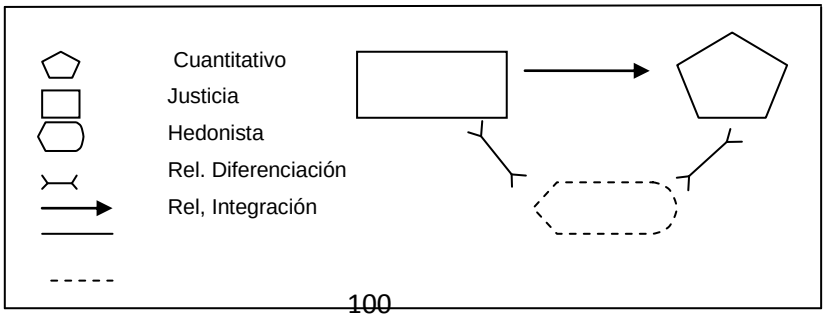
Tabla 15. Modelos explicativos P.7.

Como se desprende del siguiente registro:"*la realización de las actividades fue todo por igual, de manera que el dinero obtenido debe ser repartido por igual" (P.7). L*a expresión de igualdad es una de las concepciones que se puede tener de la justicia y también se aproxima a elementos de la matemática que indican exactitud en la medida.

En algunas de sus explicaciones parecer ser que trata de asignar valores a cualidades de los objetos que no puede ser medibles desde aspectos matemáticos: la belleza de un vaso y el gusto por una comida. Ella utiliza expresiones como: "*escojo el vaso para tomar la gaseosa no porque desea tomar mucha gaseosa, sino porque el vaso me gusta mucho"(P.7).* En las situaciones propuestas para analizar el modelo hedonista surge el modelo de justica pero no hay integración con él.

Durante las explicaciones, en el modelo de justicia hay tendencia a emplear principios de la justica por igualdad y distributiva, siendo más fuerte la justicia distributiva.

En la siguiente gráfica se puede observar la integración que se da entre los diferentes modelos explicativos.



Gráfica 10. Relación entre los modelos explicativos.

Durante el rodaje de los diferentes modelos explicativos emergieron algunos elementos relacionados con la construcción de la medida, tales como: la magnitud, la unidad, la selección del instrumento, la estimación y la selección del rango de magnitud.

Las observaciones anteriores permiten comprender qué elementos de la medida utilizan el participante en el momento dar solución a situaciones de medida. El reconoce la cualidad medible del objeto, es decir, la magnitud: el tiempo, la longitud, la masa. Durante el reconocimiento de las mismas integra la selección del instrumento conveniente para medir la cantidad de magnitud, y al seleccionarlo, supone que es el adecuado, debido a que con éste puede asignarle un número y la unidad correspondiente a la magnitud.

En una de las situaciones donde debía medir la masa de una objeto, el participante propone que puede utilizar cualquiera de las dos grameras:" *Pueden servir cualquiera de las dos (gramera 1 y gramera 2), las dos tienen capacidad para introducir el objeto, eso va ser igual en las dos partes"(P.7).* Obsérvese aquí que a pesar de que las dos grameras sirven para pesar gramos, una de ellas es para 500gr y la otra para 3 kilogramos, dos unidades de medida correspondiente a la misma magnitud pero a diferentes cantidades de magnitud, es decir, en este momento no realizó la apreciación del rango de magnitudes necesaria para seleccionar la unidad y el instrumento de medida conveniente.

En algunas situaciones se le propone estimar la cantidad cierta magnitud, pero su proceso es impreciso, ya que el resultado arrojado ni siquiera se encuentra en los márgenes de error permitidos en las diferentes magnitudes.

El proceso de estimación en la medición, permite calcular la cantidad mensurable en un objeto sin la utilización de instrumentos de medida (medida indirecta); además de analizar el instrumento pertinente a utilizar de acuerdo al rango de magnitud, al igual que la unidad.

La ineficacia en la precisión de los procesos de estimación en el participante puede darse por no contar en sus estructuras cognitivas con sistemas de referencias que le permitan relacionar la situación de medida que está viviendo con una situación vivida. Este obstáculo posiblemente sea producto de la enseñanza de la medida, puesto que lo importante para el participante, en el proceso de medición, es la asignación de un valor numérico a través de la utilización de un instrumento de medida.

En una de las situaciones se pretendía estimar el tiempo para recorrer una cierta distancia: el participante estima 10 segundo para dicho recorrido y finalmente se demoró 5 segundos. En las justificaciones del porqué de su desfase, argumenta que es malo para la estimación; además dice que *" eso es para los que trabajan en una tienda ( haciendo referencia al cálculo de la masa de la arena)"(P.7)*, además explica que en la medida son necesarios procesos donde se den estimaciones , no datos exactos y es por ello que no utiliza instrumentos de medida en su casa, sino la aproximación.

En cuanto al uso de la unidad, que es otro elemento que integra en el uso de la magnitud, el participante 7 asigna adecuadamente las unidades de medida a la magnitud correspondiente: sabe por ejemplo que la masa se da en gramos , que la longitud en metros, que el tiempo en segundos, pero como se dijo anteriormente, parece ser que para el participante 7 es lo mismo dar el resultado de la medición en gramos que en kilogramos, es decir , pareciera que no hay claridad cuando se hace uso de unas y cuando de otras. Si se desea medir cierta cantidad de masa, es necesario analizar la conveniencia de x o y gramera para dicha medida; entre menor sea su

unidad de medida, mayor va a ser su precisión, pero para el participante 7 parece ser que esto no es tan necesario, ya que asigna el número que arroja el instrumento con la unidad correspondiente.

De las observaciones anteriores se infiere que la comprensión de la medida es instrumental, puesto que hace uso de reglas que le permiten llevar a cabo dicho proceso, permitiéndole facilidad en el proceso de medida.

En el momento en que estaba midiendo la cantidad de masa de un objeto, dice:*"utilizaría la gramera número 1 ( 500 gramos) porque en la uno se ve más claro los números, en cambio en la gramera número dos se ve que hay espacios, por ejemplo: de los 100 gr a los 200 gr hay cinco espacios, o sea que se tendrá que tener en cuenta que cada espacio que hay será 20 gr, en cambio en la primera están los números bien definidos"(P.7)*, se infiere que utiliza la gramera no por la pertinencia de la misma, sino por la facilidad de poder asignar números concretos, o redondos ( (Dickson, Brown, & Gibson, 1991), desconociendo que la gramera 2 le permitirá dar el valor en kilogramos que es la unidad necesaria para el caso.

Del análisis precedente se podría concluir que lo que pretende el participante 7 al medir, es asignar un número a la medida y una unidad a dicha número, pero sin comprender lo esencial de la aplicación del número y de la unidad.

b. El contexto en la construcción de la medida

Es el contexto extraescolar una condición necesaria para acceder al concepto de medida. Para esta construcción son necesarias situaciones de tipo concreto, donde el estudiante pueda hacer uso de las diferentes magnitudes, unidades, instrumentos de medida tanto estandarizados como no estandarizados.

Situaciones donde pueda involucrar y comprender cuáles son las características de una propiedad medible de un objeto. En algunas

ocasiones dichos elementos tienen relación con procesos culturales. La masa por ejemplo, es una magnitud se le aplica a la papa, al maíz a las verduras, pero por el contra masa de las granadillas, en el contexto donde el participante 7, no se mide en gramos, sino por las unidades de granadilla.

Por aspectos culturales el participante 7 ha construido qué propiedades son medibles de ciertos objetos y cuáles no, pero desde aspectos epistemológicos de la matemática parece incapaz de explicar por qué x, y, z magnitud se puede medir, es decir, cuáles son las características medibles de dicho objeto. A tal efecto se le pregunta:

> *¿Es posible calcular la masa del agua?:*
>
> *"Pues no sé, supongo, no sí… creo! Creería que sí, la verdad no lo puedo asegurar, porque el agua al igual es un cuerpo que tiene un peso (junta las manos haciendo una forma) y que va a ocupar un volumen y por tanto debe tener un peso (P.7)".*

En el registro anterior se puede concluir que no sabe si es posible medir la masa del agua, es decir ¿las características que tiene el agua hacen posible medir su masa?, para él participante eso no es claro. Este obstáculo pudo haberlo construido en la escuela, ya que en ella se enseñan las magnitudes comúnmente medibles, pero tal vez no se ha provocado situaciones en el aula donde pueda experimentar por qué ciertas características son medibles y otras no, en un momento determinado. En la respuesta dada por el participante 7, se nota claramente un proceso deductivo que, aunque con duda, le permite concluir que el agua debe tener masa. Las propiedades que enuncia son el volumen y el peso.

Otro obstáculo puede ser de orden epistemológico, ya que es posible que al participante 7 no se le hayan enseñado los conceptos de magnitud, cantidad, y unidad de una magnitud.

La tendencia del participante 7 de la utilización del modelo cuantitativo puede ser producto de los contextos escolares, porque son escasa las situaciones que narra de contextos extraescolares, sólo hace hace referencia "cuando

va al mercado". Probablemente las situaciones que se le han propuesto en la escuela que tienen que ver con procesos de medida, no son situaciones concretas; las situaciones de la vida diaria son escasas en la enseñanza, ya que allí lo que se pretende es la instrumentalización de la medida, la enseñanza a través de formulismos.

c. Las representaciones semióticas en la medida

Se analizaron algunos registros semióticos, de los cuales se puede hacer uso cuando se habla de medida, se tuvo en cuenta lo relacionado con la magnitud, la unidad y el sistema de medida empleado.

En la magnitud se analizaron los registros relacionados con la cantidad de magnitud y el tipo de magnitud. En la cantidad de magnitud utilizó la asignación de número natural, para expresar la cantidad de materia mensurable; lo que surgió durante el modelo cuantitativo, y posiblemente se dio por su tendencia asignar números enteros a las magnitudes, proceso que permite valorar las magnitudes mediante variables discretas.

El participante hace uso del cuantificador indefinido, y aparece con mayor frecuencia en el modelo de justica y el modelo cualitativo, seguramente para poder expresar magnitudes medibles y no medibles usando procesos de comparación, como es el caso de la repartición de la herencia (magnitud medible) y la escogencia del vaso para tomar gaseosa por el gusto que le produce (magnitud no medible). Es necesario aclarar que desde aspectos matemáticos "el gusto" no es una magnitud, pero suele presentarse en los modelos explicativos alrededor de la medida, en este caso el modelo hedonista.

En el caso del tipo de magnitud, ella hace uso de la magnitud concreta ,porque hace referencia a dichas cualidades medibles por sus

características es decir, la distancia, la cantidad de arena, entre otros, no se ha logrado integrar estas magnitudes a una magnitud abstracta[2].

El tipo de unidad es la unidad concreta, puesto que está ligada al objeto que se mide, y cabe anotar que hubo registros donde ella realiza asignación numérica a la cantidad de masa pero no lo acompaña de su unidad correspondiente.

El tipo de sistema que surgió fue el convencional ya que únicamente utiliza unidades del mismo para realizar las mediciones correspondientes. Sólo en una de las situaciones utilizó patrones de medida y fue en el momento que necesita medir una cierta distancia; en dicho proceso se dio la conversión, porque inicialmente utilizó un sistema no convencional de medida, donde la unidad era una baldosa y luego pasó dicha representación a una representación de otro registro: el sistema convencional, donde hacía la conversión de que una baldosa equivalía a 25 cm.

El participante 7 hace uso de representaciones semióticas para comunicar las ideas matemáticas, pero al parecer los procesos de tratamiento y conversión no son frecuentes; dichos procesos le ayudarían probablemente a comprender el objeto matemático" medir", y no quedarse simplemente en la aplicación de técnicas y algoritmos.

**Participante 8**

a. Modelos explicativos alrededor de la medida

De la tabla 15 se deduce que los moldeos explicativos del participante 8 alrededor de la medida son: justicia, hedonista, cuantitativo, religioso; existiendo tendencia a integrar el modelo cuantitativo con el de justicia; el

[2] El doctor Federici llama "magnitud concreta" a la cantidad o instancia de magnitud física respectiva, que es la "magnitud abstracta". Citado en Lineamientos curriculares de Matemáticas, p. 63; 1998.

religioso y el de justicia. Aparece el modelo hedonista integrándose al de justica y al religioso.

| | I 1 | | | | I 2 | | | | | | | | | | I 3 | | | | | | I 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Modelo | C | | | | J | | | R | | | C | | M | | M | R | J | | | | H | |
| pregunta | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 |
| Cuantitativo | | x | x | | | | | | | | x | | | | | | | | | | x | x |
| Justicia | X | | | x | x | x | x | x | x | x | | x | | | | x | | x | | x | x | x |
| Religioso | | | | | | | | | | | | | | | | | x | | X | x | | |
| Mítico | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Hedonista | | | | | | | | | x | | | | | | | | x | | | x | | x |

Tabla 16. Modelos explicativos

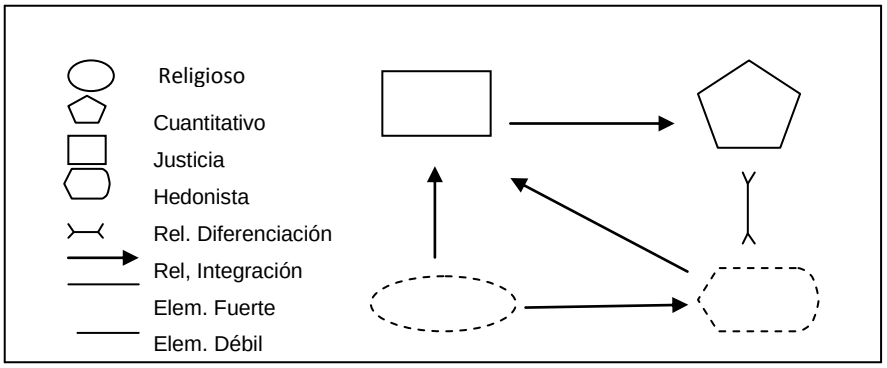
Analizando la Tabla 15 se puede inferir como en algunas situaciones de medida explica su solución haciendo uso tanto del modelo de justica como del modelo cuantitativo: "*la repartición de debe realizarse en partes iguales, a cada uno le debo tocar la misma cantidad" (P.8)*. Cuando en el registro se habla de la igualdad y de la misma cantidad, lo que se pretende es que la medida sea exacta, buscando con ello procesos de igualdad. Este hecho surge en la historia cuando se habla de la justa medida, de la utilización de las mismas pesas para que no existieran injusticias.

Aparece también la tendencia a integrarse explicaciones relacionadas con hechos de justicia y religiosos. En tal integración se deja ver la sanción por las acciones injustas que se hacen bajo procesos de medida, la presencia de un juicio final, donde allí se medirán tanto acciones justa y la acciones injustas. Al modelo se integra el modelo hedonista, porque hay pretensiones de medir los actos que se realizan, pretensiones que no son posibles desde aspectos puramente matemáticos.

En el siguiente relato: "*yo diría que en el juicio final se medirán los actos buenos y los malos, en ese momento me van a castigar" (P.8).* Obsérvese

que aquí se habla de la medida de una dimensión ética, moral, religiosa del ser humano: los pecados. Se medirán los actos buenos y los malos, en términos de justica, donde el icono es la balanza: el equilibrio entre bien y el mal.

En la gráfica 11 se presentan los modelos explicativos que el participante 8 utilizó para dar solución a las diferentes situaciones de medida. Se deduce que él enriquece sus explicaciones desde varios moldeos explicativos y que no son modelos puros, ya que existe la tendencia a la integración de algunos de ellos.




Gráfica 11. Relación de los modelos explicativos.

Durante la solución de las situaciones de medida, se utilizaron elementos que son necesarios para la construcción de la medida: la unidad, la magnitud, la selección de instrumentos, la apreciación del rango de magnitud, los procesos de estimación, de iteración (elemento que sólo surge en este participante), medida indirecta. Los últimos dos elementos no fueron frecuentes en los datos, pero se hace necesario destacarlos aquí porque son elementos que surgieron en el modelo y que pueden ser potentes para la construcción del mismo.

Los proceso de apreciación de rango, selección de instrumento, y selección de la unidad, se integraron a la medida de la cantidad de magnitud. Obsérvese el siguiente registro:

> *"¿Para qué sirve este instrumento?*
>
> *Para los gramos, los miligramos, se utilizan de poquitas cantidades*
>
> *¿Este para qué sirve?*
>
> *Este sirve para gramos,*
>
> *¿Por qué sabes? ,*
>
> *Porque ahí dice para 500 gramos.*
>
> *¿Esta?*
>
> *Esta es para más poquito, porque esta para tres formas, ésta es para más poquito, esta para miligramos y esta para gramos" (P.8).*

En el registro se observa la selección de los instrumentos para medir la magnitud y la unidad correspondiente, aunque hay momentos en que no es clara la unidad, porque dice: "sirve para más poquito", puede estar haciendo alusión a los miligramos o los gramos, dependiendo del sistema de referencia que el maneja o la comparación que esté utilizando.

Otra situación hace referencia a la apreciación del rango de magnitud cuando se habla de una cuerda: *"la cuerda sirve para medir distancias, que son muy cortas, o sea es representativa de cierta cantidad"(P.8),*se puede analizar la claridad que se tiene al escoger los instrumentos de acuerdo a la cantidad de magnitud que se tiene.

En las dos situaciones presentadas surge la utilización de procesos de estimación, ya que al analizar el participante 8 para qué cantidad de magnitud sirven los instrumentos que se tiene y al analizar la unidad

pertinente para dicha cantidad de magnitud, está haciendo uso de procesos de comparación, necesarios en los procesos de estimación.

El proceso de estimación el participante 8 es eficaz, en los que se refiere a masa, longitud y tiempo. Dicha eficacia se da por que los sistemas de referencia que ha construido en sus estructuras cognitivas le permiten relacionar la situación que está viviendo con una situación que ha pasado. En uno de los registros, cuando trata de medir la cantidad de masa de cierto objeto, evoca una situación similar que le recuerda cuando el aproxima el peso de un kilo de cierta masa en el lugar donde trabaja. Al respecto, Godino (2003) sugiere que dichos referentes permiten a una persona comunicar una medida a otra de un modo abreviado y directo.

Un elemento que emergió en el participante 8 y no se percibió en los demás estudiantes, fue la iteración, proceso necesario en la construcción de las diferentes magnitudes:

> *"La cuerda podría servir para medir (el largo del salón ), pero no se que tanto mide, de pronto medir y decir que mide 20 cuerdas, porque no es una cuerda que llegue hasta allá , porque es muy cortita y tocaría unirla varias veces"(P.8).*

El registro evidencia la utilización de la iteración en la medida, proceso en el que se da una coordinación progresiva de las operaciones de partición y desplazamiento; por ejemplo: al no existir una unidad de medida que equivalente a la longitud del salón, es posible la utilización de dicho proceso con la unidad que se tiene, repitiendo la unidad tantas veces como sea necesario y realizando particiones para estimar la medida. El proceso iterativo, permite comprender la fragmentación de la unida en trozos más pequeños, que forman parte de la misma unidad.

La medida de magnitudes intensivas es otro elemento que surgió en el participante 8, dicha magnitud es así llamada por la existencia de rasgos para los que tiene sentido agregar los objetos que soportan pero la cantidad

del rasgo en el objeto agregado no es proporcional mente aditiva. El participante 8 en una de las situaciones propuestas explica que la densidad se puede medir usando algunos instrumentos que hay allí. Lo cual indica que no sólo hace uso de medidas extensivas, magnitudes que se pueden describir como "proporcionalmente agregabales", sino también de magnitudes intensivas.

b. El contexto en la construcción la medida

La utilización del contexto extraescolar es un factor que ha permeado la construcción de la medida en el participante 8, puesto que en su vida cotidiana trabaja en una tienda, donde en ella debe hacer uso de la medida; también hace parte de dicha construcción el contexto cultural por la relación existente entre la medida y la religión.

El participante 8 expone el motivo por el cual ha construido proceso de estimación frente a la magnitud masa: *"En la tienda desarrollamos ese proceso de saber cuánto es, lo hacemos con la mano, en esta bolsa hay de tres a cuatro kilos, siempre esta pesado".(P.8).* El propone que el desarrollo de su habilidad de estimación es bueno en algunas magnitudes, ya que cuando se le solicito la estimación en líquidos no fue capaz de realizar la estimación. Es decir el sostiene que su habilidad de estimación con la masas es por el trabajo que realiza. Se concluye por lo tanto, que en los procesos de medición son necesarios contextos reales y concretos, y específicamente, para el desarrollo del proceso de estimación.

El participante 8 presenta facilidad para escoger el instrumento necesario para que la medida sea exacta, exactitud que está relacionada con redondear números:" *aquí hay 540 gramos, saco la arena del plato que me sobra, para que me dé exacto, 2540"* (P.8), es decir, que no de 2541 gramos, ya que como trabaja en un granero los valores regularmente son múltiplo de 10.

Se observa también que en su construcción de la medida es importante la asignación de números, sin comprender en algunas ocasiones la magnitud que se va a medir. Se le pregunta que si se puede medir la masa con una cuerda, él sostiene que no sirve y argumenta que la cuerda no tiene números que indiquen la cantidad. Lo anterior hace suponer una visión instrumental de la medida, donde se pretende asignar un número con un instrumento de medida, entonces ¿qué es lo que se puede medir con la cuerda?, podría decirse que no le son claras las propiedades que debe tener cierta magnitud para ser medible.

En otros registros, cuando se le pregunta la posibilidad de medir la arena con la probeta, es decir, utilizando la probeta que magnitud se estaba midiendo; él trata de realizar una comparación entre la gramera y los mililitros de la probeta, es decir, es una relación entre 1 gramo y 1 mililitro; hay dificultad en comprender ¿cuáles propiedades son medibles de acuerdo con la magnitud?, en este caso la masa o el volumen.

c. El uso de las representaciones semióticas en las medida

En la utilización de registros semióticos se analizaron los registros empleados en la cantidad de magnitud, tipo de magnitud, tipo de unidad, sistema de medida. El en registro semiótico referido a la cantidad de magnitud utilizó representaciones semióticas para número natural, cuantificadores indefinidos y del número decimal; como resultado de la utilización de los instrumentos es frecuente el uso del número natural.

El uso del número natural permite concluir que asume las magnitudes empleadas en las situaciones como variable discreta, es decir, se presenta dificultad en ver procesos continuos en la medida, por eso busca redondear cantidades, dando medidas exactas como él mismo lo enuncia: “*uno nunca*

*dice una hora 15 segundos, uno dice la hora exacta" (P.8)*, es decir utilización de valores numéricos sin decimales, no cantidades continuas.

Otro elemento que emerge es el uso de la magnitud concreta, debido a que él hace uso de las características que hacen posible dicha magnitud, por ejemplo, el largo, el ancho, la arena, los tomates. Se le dificultad integrar todas esas magnitudes concretas a una sola magnitud, la magnitud abstracta: la longitud, la masa .

Hay reconocimiento de la unidad concreta para cada magnitud, porque depende del objeto que se va a medir. En uno de los registros se le pide que explique por qué se utilizan los gramos para la masa y dice que porque es gramera, de gramos, es decir, da a entender que son gramos no porque sea una unidad de masa, si no porque viene del uso del instrumento de medida.

El uso del sistema de medida es el convencional, ya que por lo que se infirió de los datos, no se presentaron explicaciones que orientarán el uso de un sistema no convencional.

## 4.2. Discusión de los resultados obtenidos

- Estudiantes de primaria:

Del análisis presentado anteriormente de los P.1, P.2, P. 3, P.4, es posible concluir que los estudiantes de primaria que participaron en esta investigación tienen tendencia a utilizar los siguientes modelos explicativos: cuantitativo, hedonístico, religioso y de justicia para dar soluciones a situaciones de medida, surgiendo con fuerza los modelos de justica, cuantitativos y hedonista. El modelo que surge con debilidad en los

participantes es el religioso, donde sólo hacen uso de él, tres de los cuatro participantes.

Surgen algunas relaciones en los modelos explicativos, como son la integración entre el modelo de justicia y el modelo religioso, integración que surge en tres de los cuatro participantes. Esto se explica cuando los participantes utilizan en sus argumentos elementos que dan cuenta de una relación entre los dos modelos, combinando así lo religioso con argumentos de equidad e igualdad.

Otra integración se presenta entre el modelo hedonista y el de justicia, lo mismo que entre el modelo religioso y el hedonista, integraciones que surgen en un solo participante. Lo anterior se afirma porque cuando tratan de medir propiedades que no pueden ser medidas bajo los parámetros convencionales de la medida y acuden a elementos religiosos o de justicia, igualdad y distribución.

Es necesario tener en cuenta que de acuerdo con Gómez, et al. (2004), los modelos explicativos se han construido durante su vida, tanto en contextos escolares como extraescolares y generalmente dichos modelos suelen ser estáticos, aislados, se basan en causalidad simple y son deterministas.

Durante la puesta en marcha de los diferentes modelos explicativos surge la magnitud, pues los participantes entrevistados asumen que hay alguna propiedad de los objetos susceptible de ser cuantificada. La abstracción de dichas cualidades está influencia por el contexto cultural, puesto que es usual encontrar que intentaran medir en los objetos propuestos las magnitudes socialmente aceptadas en su contexto, p.e, es usual que de la arena se mida la masa; pero también se pudo observar como ellos asignaban otras magnitudes a dichos objetos, tratando de medir la longitud de la arena, o

utilizando instrumentos de medida propios de unas magnitudes a otras magnitudes; medir el tiempo contando los números de la regla o la masa del agua con la probeta. La razón de lo anterior es la necesidad de los participantes en asignar números a dichas magnitudes.

En algunas situaciones donde se pretendía asignar un número, los participantes no acompañaban este valor numérico por la unidad, es decir, fue constante el uso de lo que Brousseau (1991) llama medida imagen. Brousseau realiza un análisis de la complejidad del concepto de medida y alrededor de esto hace distinción entre ocho objetos distintos en los problemas de la medida, uno de ellos es la medida imagen, la cual hace referencia a que a un objeto "x" se le abstrae la cualidad medible y se le asigna un número, pero es necesario aclarar que este número no comporta ninguna medida.

De acuerdo con lo concluido, la utilización de la unidad (llámese unidad-patrón o unidad-concreta) durante la asignación del valor numérico fue necesaria en algunos participantes (P.1, P.2), este hecho posiblemente se puede dar por la relación con los contextos en que están involucrados, ya que ellos narran el uso que hacen de la medida personas con las cuales se relacionan ( tíos, amigos, padres). Al indagar el uso de la unidad en las respuestas, se pudo evidenciar que no hay comprensión en la necesidad de la misma cuando se cuantifica la magnitud y esto se concluye porque no todas las veces hacen uso de la unidad cuando se está cuantificando la magnitud.

El uso de la unidad es instrumental, determinado por la prevalencia en el proceso de enseñanza de una matemática formal y mecanicista donde se privilegian las reglas, los algoritmos, las fórmulas, entre otros. Aspectos, que

inciden tanto en el estudiante como al maestro de obtener una falsa información sobre lo aprendido.

En la utilización de la estimación perceptual, los participantes se involucraron constantemente en la solución de situaciones de medida donde era necesario establecer procesos de comparación. El uso de este proceso permite inferir que los participantes han elaborado sistemas de referencia en sus estructuras cognitivas que les permiten estimar la cantidad de magnitud.

Los contextos extraescolares favorecen la construcción de los procesos de medición porque en los registros analizados se puedo observar como el P.1, P.2, P.4 incorporan en la solución de situaciones de medida, instrumentos estandarizados, teniendo en cuenta el rango de la magnitud para seleccionar el instrumento de medida; en contraste el participante 3 evoca en los registros escasos elementos relacionados con la medida; además de ello, en ninguno de los casos registrados utilizó la unidad acompañada de valor numérico, así como tampoco tuvo en cuenta el rango de magnitud para la selección del instrumento de medida.

Uno de los aspectos más sobresalientes en la aparición de los modelos explicativos, en el uso de los instrumentos de medida y en la aplicación de algunos elementos conceptuales de la medida, fue el contexto porque los participantes 1, 2, 3 y 4 hacían referencia entre las situaciones propuestas en el trabajo de campo y otras similares vividas por ellos en contextos extraescolares, y en ninguno de los casos establecieron relación con situaciones vividas en la escuela.

En lo que se refiere a los registros semióticos, que emergieron en la investigación, se concluye que los participantes utilizan con frecuencia en el registro semiótico cantidad de magnitud a través de los números de contar y

los cuantificadores indefinidos. Esto se debe posiblemente a la tendencia de los niños de asignarle un número a lo que se mide, tratando de relacionar lo continuo con lo discreto. El uso de sistemas estandarizados de medida se reconoce cuando utilizan los instrumentos para dar solución a algunas situaciones, en donde el tipo de magnitud utilizada es la concreta.

Se podría afirmar que en las representaciones semióticas asociadas al sistema métrico, los estudiantes continúan basados en el sistema métrico decimal, donde no se evidenciaron procesos de tratamiento y conversión.

- Estudiantes de formación complementaria

En los estudiantes de formación complementaria, que aparecen codificados como el P.5, P.6, P.7, P.8, hacen uso de diversos modelos explicativos que utilizan para dar solución a las situaciones de medida planteadas. Entre ellos podemos anotar: el modelo de justicia y el modelo cuantitativo, también emergen el modelo hedonista y el modelo religioso, aunque su aparición no es fuerte.

Se evidencian integraciones entre los diferentes modelos: de justicia y religioso, hedonista y de justicia; religioso y hedonista, y entre el cuantitativo y el de justicia. Es importante reconocer que la riqueza de estas integraciones evidenciadas en los estudiantes adolescentes da cuenta de la posibilidad de interacción de los diferentes modelos en el momento de explicar o argumentar situaciones de medida.

El modelo hedonista surge por la necesidad de los participantes de medir magnitudes relacionadas con situaciones de justicia y religiosas que no son medibles desde aspectos epistemológicos de la medida. La relación de integración que se da entre los modelos de justicia y cuantitativo, emerge en

los datos por la necesidad de una medida justa, que se basa en procesos de exactitud, en términos de igualdad o distribución.

Del análisis de los modelos explicativos, se puede inferir que en la estructura cognitiva de los participante hay distintos modelos explicativos que actúan de manera independiente, dependiendo de las situaciones que se le presentan (Gómez, et al, 2004; Tamayo, 2001). La identificación y caracterización de estos modelos explicativos podría ayudar a entender por qué los estudiantes en algunos contextos parecen adoptar ideas más cercanas a las aceptadas científicamente y casi simultánea en otros contextos recurren a concepciones incompatibles con las aceptadas científicamente.

En la solución de las diversas situaciones de medida surgen elementos que son necesarios para la construcción de la medida, como son la abstracción de la magnitud en cada una de la situaciones propuestas, la asignación de la unidad de acuerdo con la magnitud señalada, la estimación que se hace evidente durante la apreciación del rango de magnitudes, la selección del instrumento de acuerdo con el rango de magnitud y de unidad. Estos dos últimos elementos sólo surgen en dos de los participantes (P.6 y P.8) y probablemente emerjan por la relación que tienen con contextos extraescolares en donde se requieren las medidas.

Otro elemento es la precisión en la estimación que tienen los participantes 6 y 8 frente a situaciones de masa, posibilidad de estimación que posiblemente se debe por la vinculación que tienen los sujetos participantes con situaciones de medida, aspecto que no se evidencia con los participantes 5 y 7, ya que estos no tienen un contacto permanente con este tipo de situaciones; además relatan que se les dificultan los procesos de estimación porque no están involucradas en dichos contextos, situación que puede

sustentar la dificultad que tienen en la apreciación del rango de magnitud, la selección adecuada del instrumento de medida de acuerdo al rango de magnitud y la selección de la unidad.

El proceso de estimación en la construcción de la medida tiene implícita algunas características, ello se debe a que el sujeto que hace la medida tiene alguna información, referencia o experiencia sobre la situación que se aborda; la valoración se hace por lo general en forma mental, el valor asignado no es exacto pero si adecuado para tomar decisiones (Reys, 1989; Segovia, Castro, Rico, 1989; citado en Segovia y Castro, 2009). De acuerdo con ello podría inferirse que tanto el participante 5 y 7 poseen obstáculos con los procesos de estimación, porque dichos participantes poseen pocas experiencias que les permitan aproximarse a los procesos de estimación. Además dicho proceso permite tomar decisiones frente a los instrumentos y las unidades adecuadas a utilizar frente a dicha estimación, y para dichos participantes tales aspectos no son necesarias en la medida, puesto que nos los tienen en cuenta durante el proceso de medición.

Aunque en el discurso de algunos de los participantes hacen uso del objeto de medida llamado en algunas veces medida concreta o número concreto (Brousseau, Guy; Brousseau, Nadie, 1991-92); par formado por la imagen (el número) y por la función (aplicación aditiva y positiva de un conjunto medible en R), acompañada por una unidad; no es posible concluir que en realidad lo comprendan, puesto que al pedir la explicación del uso de la medida concreta, ellos suelen argumentar que el número siempre debe ir acompañado de alguna cosa, es decir, es una comprensión instrumental de la medida concreta.

En otras situaciones no es muy claro que se pretende al medir cierta magnitud en los objetos: si es la asignación de un número a una cualidad del

objeto; si dicha cualidad tiene las características necesarias para poder ser medida o si la magnitud es aceptada en la cultura, puesto que en algunas ocasiones los participantes cuantifican , sin preguntarse cuál es la finalidad de la medida de dicha magnitud, p.e, tratar de medir la longitud de una bolsa de arena, es decir, en algunas ocasiones pareciera que la medida es un proceso instrumental, donde lo que se pretende es la aplicación de procesos aritméticos y reglas; producto esto de los proceso de enseñanza.

Los contextos extraescolares han permitido que tanto el participante 6 y 8 vinculen en sus explicaciones más elementos que los participantes 5 y 7; además de ello el contexto escolar ha sido obstáculo para dicha construcción, debido a que en las explicaciones de los participantes 5 y 7, se observa el carácter instrumental de la medida, donde lo que prima en la medición es la asignación numérica a una cualidad medible del objeto.

En lo que se refiere al uso de los registros semióticos los participantes 6 y 8 hacen uso en la cantidad de magnitud de las representaciones: cuantificadores indefinidos y números de contar. El tipo de magnitud representa la magnitud concreta, en el tipo de unidad hace uso de representaciones para la unidad concreta, y el sistema de medida utilizado es el sistema estandarizado. Tanto el uso de las representaciones utilizadas para la cantidad de magnitud, el tipo de magnitud y el tipo de unidad, permiten concluir que hay obstáculos en los procesos de medición, puesto que sus explicaciones alrededor de la medida no le permiten profundizar en aspectos más científicos de la medida que tienen que ver con la construcción de la magnitud, de la unidad y de la medida misma.

De gran importancia en los resultados fueron la presencia de los procesos de tratamiento y conversión en los registros semióticos utilizados, necesarios para el aprendizaje de las matemáticas, en este caso la medida, puesto que

dichos procesos permiten comprensiones profundas de los objetos matemáticos; ahora bien podría inferirse que las representaciones semióticas de los cuales hacen uso los participantes les permiten comunicar lo que han construido alrededor de la medida, pero estos no les han permitido evolucionar en la construcción del objeto matemático : medida.

## Conclusiones y recomendaciones

En las páginas precedentes se ha inferido a través de las producciones de los participantes algunos elementos de los modelos mentales que se ejecutan cuando resuelven las situaciones planteadas. Tanto los participantes de segundo grado como los participantes de formación complementaria poseen elementos comunes en los modelos que ejecutan; por ejemplo los modelos explicativos: cuantitativo y justicia.

En el modelo cuantitativo fue recurrente en ambos grupos ven la medida como un proceso de asignación numérica, elemento que implica obstáculos en el aprendizaje de la medida, porque se ve reflejado en ellos la fuerza que le ha dado la escuela al desarrollo del concepto de número. En cuanto el modelo de justicia en las diferentes situaciones se observó que la aplicaban desde principios de igualdad o principios distributivos, todo depende de la situación que se propusiera.

Otro elemento que es frecuente en los niños, pero tiende a desaparecer en los participantes de formación complementaria es el hedonista, posiblemente este hecho ocurra por la comprensión que el segundo grupo va adquiriendo de la medida. También se observa en los modelos como los estudiantes integran dos o tres modelos para darle solución a las situaciones de medida.

Los modelos explicativos en la construcción de la ciencia podrían ser clave para la comprensión de la medida, ya que la caracterización e identificación de los mismo podrían ayudar a entender por qué los estudiantes en algunos contextos tienen ideas más cercanos a las acertadas científicamente y casi simultáneamente en otros contextos recurren a elementos incompatibles con las aceptadas científicamente.

Los elementos conceptuales que rodean el objeto matemático: medir, como son la magnitud y la unidad, son débiles en las construcciones tano de los niños como de los jóvenes. En los niños este aspecto no es muy relevante porque están iniciando procesos de construcción, pero en los estudiantes de formación complementaria es preocupante, puesto que cabe preguntarse ¿qué sucedió con la enseñanza de la medida durante su proceso formación en la educación básica y media?. A pesar de que en algunos de ellos hay comprensión en la utilización de los instrumentos de las diferentes magnitudes, de la unidad que acompaña a cada magnitud, dicha comprensión suele ser instrumental, debido a que es una aplicación de reglas y técnicas para medir.

Parecer ser que en la enseñanza de las matemáticas, especialmente de las medidas, sigue fortalecido un modelo formalizado y tecnisista de la misma, puesto que en los currículos normalmente se presta mayor atención a la asignación numérica con miras a aplicar el proceso de aritmetización, que a la construcción de la magnitud y la unidad. La construcción comprensiva de dichos conceptos favorecería la comprensión no solo de la medición, sino también de la construcción de sistemas de medidas estandarizados y no estandarizados.

Otro elemento que fue débil en los participantes, pero llama más la atención en los estudiantes de formación complementaria es el desarrollo de la estimación, observándose que en los niños dicha estimación suele ser perceptual, igual ocurre en dos de los jóvenes, ellos mismos explicaban que no eran buenos en procesos de estimación.

Este hecho implica que exista una tendencia en los estudiantes a utilizar una medida directa, cuando en realidad, en los procesos de medida es usual la medida indirecta, ya que no se tiene a disposición instrumentos que les

permite asignarle el número a la medida con facilidad. Lo anterior dificulta el desarrollo de procesos necesarios para la medición como son la apreciación del rango de magnitud, selección de la unidad, selección del instrumento, puesto que la estimación permite a los individuos planificar el proceso de medida.

Los jóvenes no logran captar en los diferentes objetos porqué es mensurable una cualidad, ya que lo suelen hacer por imitación de su cultura, es decir, ellos en sus explicaciones no son capaces de explicar por qué la masa puede ser medible pero suelen abstraer la cualidad medible de cada objeto, también asignarle al objeto otra cualidad que en el contexto no es medible ( medir la longitud de la arena), estos hechos evidencian que la comprensión, como se mencionó anteriormente, suele ser instrumental.

Algo que es importante en los resultados de la investigación es la influencia que tiene el contexto extraescolar y escolar en la medida, porque en ella surge lo que Chamorro(1991, 2001, 2003) Dickson (1991), Godino, Batanero & Roca (2005), M.E.N (1998), NC.T.M(2000) , enuncian alrededor de la necesidad de enseñar la medida con aspectos concretos, es decir, en el aula se desarrollan los procesos de estimación colocando a los estudiantes a estimar, construir la magnitud se hace desarrollando con ellos actividades que les permitan abstraer las propiedades medibles de los objetos.

Es necesario por lo tanto que en la enseñanza de la medida se involucren actividades que se relacionen con el contexto extraescolar, para evitar que suceda lo que suele suceder en el aprendizaje de las matemáticas: las matemáticas de la escuela son diferentes a las matemáticas de la vida cotidiana, por lo tanto ¿ qué aspectos de la medida son necesarios enseñar en la escuela para que dichos procesos permitan a los estudiantes

tomar decisiones en su vida cotidiana que se relacionan con dichos elementos?.

Ahora bien en los estudiantes entrevistados se puedo ver como algunos de ellos tenían experiencias extraescolares con la medida y esto tal vez ha permitido que comprendan ciertos aspectos de la medida, como son el uso de los instrumentos, la cualidad medible de algunos objetos. Posiblemente en la enseñanza de la medida tenga cabida elementos de la etnomatemáticas, porque ella aporta elementos para elaborar estrategias que favorezcan la enseñanza de la misma, a demás la etnomatemáticas tiene que ver con las matemáticas de las diferentes culturas, permitiendo que se involucre en el aula la cultura de las matemáticas de la vida cotidiana.

De otro lado tenemos el análisis de algunas representaciones semióticas que hacen uso los estudiantes para comunicar sus ideas alrededor de la medida con dichas representaciones es que ellos comunican lo que internamente han construido del mundo, de los fenómenos, de los hechos, se utilizaron estas representaciones , porque los objetos matemáticos solo pueden ser comunicables a través de ellas por ser entes abstractos, ya que, algunas veces los objetos matemáticos son abstracciones que hacemos de los objetos del mundo real.

En este análisis se concluye que surgen diferentes representaciones para cada uno de los registros seleccionados: tipo de magnitud, tipo de unidad, cantidad de magnitud y sistema de medida. En algunos de los registros son pocas las representaciones semióticas que surgen, como es el caso del tipo de unidad, de magnitud, porque en su lenguaje verbal hacen referencia a un tipo de magnitud y unidad concreta. Tales representaciones permiten comprender en detalle los mecanismos que facilitan u obstaculizan las construcción de sistemas externos de representación, como también

permitieron concluir que a pesar de que en el lenguaje los estudiantes hacen referencia tanto a la magnitud como a la unidad, sus procesos de comprensión son superficiales. Respecto a lo anterior Tamayo (2006) argumenta el hecho de que no hay comprensión si no se diferencia un objeto de su representación, de otro lado también sostiene que el progreso en el conocimiento está acompañado del desarrollo de nuevos sistemas de representación.

Para el aprendizaje de los diferentes conceptos, como los conceptos matemáticos, los procesos de formación, tratamiento y conversión de las representaciones semióticas son necesarios para su comprensión. En los registros semióticos analizados el último elemento surge débilmente ya que solo en dos de los participantes emergen estos dos procesos pero someramente, es decir, los estudiantes hacen uso de las representaciones semióticas para comunicar lo que han construido pero esto es un obstáculo ya que se desconocen los procesos de transformación y conversión necesarios, para el aprendizaje profundo de los mismos.

Puede que una de las causas en las dificultades de los estudiantes en la construcción de los conceptos de medida sea el poco tratamiento que se le ha dado en el aula a las representaciones semióticas y el proceso consciente del tratamiento y la conversión. Posiblemente esto también tenga implicaciones en los procesos de transposición didáctica que se ha dado de la medida, por tanto, es necesario que los docentes que enseñan matemáticas hagan uso consciente de los procesos de tratamiento y de conversión de las representaciones semióticas que hay alrededor de la medida, permitiendo con ello el uso de variadas representaciones semióticas.

El uso la teoría de los modelos mentales propuesta por Johnson-Laird ( 1983) permite comprender los qué piensan lo sujetos de los fenómenos, dicha teoría es potente para la educación porque permite comprender lo qué piensan los sujetos alrededor de las estado de cosas del mundo, la interior de los modelos mentales surgen muchos elementos . La investigación analizó lo relacionado con los modelos explicativos que surgen en los modelos mentales, los elementos conceptuales que surgen sobre el concepto de medida, el contexto y algunas representaciones semióticas que utilizan, posiblemente pueden surgir otros elementos en los modelos.

Al usar la teoría de los modelos mentales para analizar los que comprenden las personas del estado del cosas del mundo puede ser complejo porque es el investigador quien hace la interpretación de lo modelizado, dicha interpretación tiende a ser subjetiva, pero este tipo de estudio permite una mejor aproximación respecto de lo que piensan los sujetos, respecto de lo que han representado internamente del mundo exterior.

En el análisis de los modelos mentales es necesario ser riguroso en el análisis. Los instrumentos aplicados deben permitir, en lo posibles, hacer consciente los elementos de los modelos, puesto que en el rodaje de los modelos mentales por ser económicos, no siempre se refleja todos los elementos que están implicados en él.

En este estudio fue necesario analizar los elementos de los modelos mentales a través del discurso oral en los niños, puesto que ellos presentan facilidad en este tipo de discurso que en el escrito; con los estudiantes de formación complementaria se utilizó tanto el análisis del discurso oral como escrito, pero se observó que en el discurso oral eran mucho más rica la información , ya que se expresan más elementos del modelo.

Este tipo de estudio tiene implicaciones para la didáctica de las matemáticas, debido a que se está analizando lo que han construido los estudiante de la medida y a partir de allí generar procesos de reflexión que permitan cualificar los currículos para la enseñanza de la medida, analizar profundamente los textos escolares que se utilizan para la enseñanza de las matemáticas, ya que algunos de ellos( por no decir todos) presentan la medida como un producto y no como un proceso que está en constante evolución.

También podría tener impacto en la formación de maestros, no solo para primaria sino para la secundaria, ya que como se muestra en el análisis y algunas conclusiones, la construcción del concepto de medida de dichos participantes es superficial; permitiendo que los estudiantes para maestros, sean conscientes del las dificultades que tienen frente a dicho concepto matemático y la complejidad de su enseñanza y aprendizaje.

## Bibliografía


Alurralde, Estela; Salinas, Julia;. (s.f.). *Modelos explicativos que estructuran las ideas de los estudiantes en física: aportes, resultados e interpretaciones para el aprendizaje de empuje.* Obtenido de www.feeye.uncu.edu.ar/.../060%20-%20Alurralde%20y%20Salinas%20-%20UN%20Tucuman.pdf

Alvarado, S. V. (2005). *Concepciones de justicia en niños y niñas que habitan contextos urbanos violentos.* Recuperado en Septiembre de 2008 de www.google.com

Bentham, J. (1789). Valor del placer o el dolor y cómo medirlos. Fragmento de "Introducción a los principios de la moral y de la legislación. Documento bajado de: www.google.com

Bishop, A. (1999). En *Enculturación matemática.* Paidos.

Bishop, A. (2005). *Aproximación sociocultural a la Educación Matemática.* Santiago de Cali: Universidad del Valle. Insitituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática.

Brousseau, Guy; Brousseau, Nadie. (1991-92). El peso de un recipiente. Estudio de los problemas de la medición en CM.Traducción : Juan D. Godino. *"Gran N", nº 50* , 65-87.

Callis i Franco, Josep; Fiol Mora, María Luisa;. (2003). *Caraterísticas incidentes en la estimación métrica longitudinal.* Recuperado el 4 de junio de 2007, de Dialnet: dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2258647

Campbell, N. C. (1956). *La Medición.* Recuperado el 4 de Noviembre de 2007, de Universidad de Antioquía: ayura.udea.edu.co/~fisica/MATEFISICA/EPISTEMOLOGICA/Archivos/Medicion/medicion2.pdf

Chamorro Palza, M. d. (1991). *El problema de la medida: didáctica de las magnitudes lineales. Matemáticas: cultura y aprendizaje.* Madrid: Sintesis, S.A.

Chamorro Plaza, M. D. (2003). El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. En M. d. Chamorro Plaza, *Didáctica de las Matemáticas para primaria* (págs. 221-243). Madrid: Pearson Prentice Hall.

Chamorro Plaza, M. d. (2001). Las dificultades en la eneñanza-aprendizaje de las magnitudes en Educación Primaira E.S.O. En ., J. M. Belmonte Gómez, J. Bolon, M. D. Chamorro Plaza, B. D Amore, L. Ruiz Higueras, y otros, *Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas* (págs. 79-117). Madrid: Aulas de Verano. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

D-Amore, B. (2004). *Conceptualización, registros de representación y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución.* Recuperado el Abril de 2009, de Dialnet: http://dialnet.unirioja.es/

D-Amore, B. (2006.). *Objetos, signifcados, representaciones semióticas y sentido.* Recuperado el Marzo de 2009, de Relime: http://dialnet.unirioja.es/

D-Amore, B., & Fandillo Pinilla, M. I. (2001). *Matemática de la cotidianidad.* Recuperado el Abril de 2009, de dialnet: http://dialnet.unirioja.es/

D-Amore, Bruno;. (2001). Objetos matmáticos y registros semiótiocs: ¿qué es aprender conceptos matemáticos? En M. d. Chamorro Plaza, *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas* (págs. 31-52). Madrid: Secretaría general Técnica.

Díaz Godino, J. (2003). Concordancias y complementariedades. En J. Díaz Godino, *Teoría de las funciones semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instruciión matemática* (págs. 233-253). Granada: Distribución en internet: www.ugr.es/local/jgodino.

Díaz, G. J. (2003). Ontologías y Epistemologías sobre la cognición Matemática. En G. J. Díaz, *Teoría de la funciones semióticas: Un enfoque ontológico -semiótico de la cognición e instrucción matemática* (págs. 27-80). Granada: www.ugr.es/local/jgodino.

Dickson, L., Brown, M., & Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: Centro de publicaciones del MEC.

Díez Calzada, J. A. (1993). *Introducción a la historia de la metrización. Dos líneas de invesitgación: Axiomática y morfismos reales , escalas e invarianzas.* Recuperado el Febrero de 2009, de Éndoxa: Series Filosóficas, nº 2: http://dialnet.unirioja.es/

Diez Palomar, F. J. (2000). *La enseñanza de las matemáticas en la educación de personas adultas. Un modelo dialógico. Tesis doctoral. Universidad de Barcelona.* Recuperado el Abril de 2009, de Dialnet: http://dialnet.unirioja.es/

Duval, R. (1995). Semiosis y pensamiento humano.

Elichiribehety, Inés; Otero, María Rita; Fanaro, María de los Angeles;. (2002). Los modelos que subyacen a la resolución de problemas algebraicos: un estudio transversal. *Relime , 5* (2), 169-198.

Figueiras Ocaña, L. (2002). *Tesis doctoral. Historia, matemáticas y realidad. El caso de la medida en la en la formación matemática de futuros maestros.* Recuperado el 4 de Junio de 2007, de www.tesisenxarxa.net/TESIS_UAB/AVAILABLE/TDX-0123104-151356//lforesum1de1.pdf

Font, V. (2007). *Comprensión y Contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas.* Recuperado el Abril de 2009, de Dialnet: http://dialnet.unirioja.es/

Font, V. (2006). *Problemas en un contexto cotidiano.* Recuperado el Abril de 2009, de Cuaderno de Pedagogía, 355: http://dialnet.unirioja.es/

Font, V., & Ramos, A. B. (2006). *Contexto y contextualización en la enseñanza y le aprendizaje de las matemáticas. Una perpectiva ontosemiótica.* Recuperado el Abril de 2009, de Dialnet: http://dialnet.unirioja.es/

Giere, R. (1992). Modelos y teorías. En R. Giere, *La explicación de la ciencia* (pág. 352). México: Consejo nacional de ciencia y tecnología.

Godino D. Juan; Batanero C.; Font V. (2004). *Didácticas de las Matemáticas para Maestros: Magnitudes.* Recuperado el 2006, de www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros

Godino D. Juan; Batanero C; Roa R. (2004). *Matematicas para maestros: Magnitudes.* Recuperado el 2006, de Proyecto Edumat-maestros: www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Godino Díaz, Juan;. (2003). Comprensión y competencia matemática. En J. Godino Díaz, *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática* (pág. 318). Granda: Universidad de granada.

Godino, J. D. (2003). Paradigmas, problemas y metodologías de investigación en Didáctica de las Matemáticas. En J. D. Godino, *Investigaciones sobre fundamentos teóricos y metodológicos de la Educación Matemática* (págs. 59-74). Granda: Universidad de Granada.

Goetz, J.P; LeCompte , M.D.;. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en invesitgación educativa.* Madrid: Morata.

Gómez, C., Márquez, B., Roca, M., Pujól Vilallonga, R. M., & Sardá, A. (2004). La construcción de modelos explicativos complejos mediante preguntas mediadoras. *Invesitgación en la Escuela Nº 53* , 71-82.

Gutiérrez Penagos, M. A. (2006). Prácticas Ancestrales de medición en el Resguardo Indígena de Avirama: Elementos para el fortalecimiento de una educación propia. Santiago de Cali, Valle del Cauca, Colombia.

Gutierrez, R. (1994). *Coherencia del pensamiento espontáneo y causalidad. El caso de la dinámica elemental.* Obtenido de Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid: www.dialnet.unirioja.es

Gutiérrez, R. (2005). *Polisemia actual del concepto "Modelo Mental". Consecuencias para la invesitgación en didáctica.* Recuperado el 17 de Febrero de 2008, de Revista electrónica Investigación en Enseñanza de la Ciencia: www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID129/v10_n2_a2005.pdf

Gutiérrez, Rufina. (1996). Modelos mentales y concepciones espontáneas. *Alambique, 7* , 73-86.

Inván, S. M. (s.f.). *Las Matemáticas en Grecia durante los años 800 a.c - 600 d.c.* Recuperado el 24 de Enero de 2008, de Matemáticas: matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/2/Grecia.pd

Johnson-Laird, Philip; García-Madrugada, Juan; Gutiérrez , Francisco; Carriedo, Nuria;. (2002). Razonamiento con condiciones múltiples. La perspectiva de los modelos mentales. *Anuario de Psicología.Vol 3, nº 1* , 3-24.

Johson-Laird, P. (1987). Modelos mentales en ciencia cognitiva. En D. Norman A., *Perspectivas de las ciencias cognitivas* (págs. 179-231). Paidós.

Kuhn, S. T. (1996). La función de la medición en la física moderna. En S. T. Kuhn, *La tensión esencial* (págs. 202-247). México: FCE.

Kula, W. (1999). *Las medidas y los hombres.* Madrid: Siglo ventiuno editores, S.A. de C.C.

M.E.N. (1998). *Lineamiento curriculares. Matemáticas.* Bogota. D.C: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Moreira, M. A. (1999). *Modelos Mentales.* Recuperado el 8 de Noviembre de 2007, de Programa de doctorado Internacional en Enseñanza de las Ciencias.Universidad de Burgos, España; Universidade Federal do Rio grande do Sul ; Brasil.: http://www.if.ufrgs.br/~moreira/modelosmentales.pdf

Moreira, M. A., & Greca, I. M. (1998). Modelos mentales, modelos conceptuales y modelización . *Enseñanza de la Física, vol 15, nº2* , 107-120.

Moreira, M. A., Rodriguez Palmero, M. L., & Marrero Acosta, J. (V6(3), pp.243-268 de 2001). *La teoría de los Modelos Mentales de Johnson Laird y sus prioncipios: Una aplicación con modelos Mentales de célula en estudiantes del curso de orientación universitaria.* Recuperado el Agosto de 2007, de Revista Investigación en Enseñanza de la Ciencia: http://www.if.ufrgs.br/ienci/

Moreira, Marco Antonio; Greca, Ileana;. (1996). *Estudio piloto sobre representaciones mentales, imágenes, proposiciones y modelos mentales respecto al concepto de campo electromagnetismo en alumnos de física general, estudiantes de postgrado y físicos profesionales.* Obtenido de Revista en invesitgación en enseñanza de las ciencias.: www.dialnet.unirioja.es

Moreira, Marco Antonio; Greca, Ilena María. (1998). *Modelos mentales y aprendizaje de física en electricidad y magnetismo.* Obtenido de Revista enseñanza de las ciencias. 16 (2), 289-303: www.dialnet.unirioja.es

Moreria, M. A., & Greca, I. M. (2002). Modelos mentales y modelos conceptuales en la enseñanza y aprendizaje de las ciencias. *Revista Brasileña de investigación en educación en ciencias.v,2, n º3* , 37-57.

Moulines, U., & Díez, J. (1999). La medición en la ciencia. En U. Moulines, & J. Díez, *Fundamentos de la filosofía de la ciencia* (págs. 173-217). Arile.

NTCM. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.Primera edición en Castellano.* Sevilla: S.A.E.M. Thales.

Otero, María Rita; Banks-Leite, Luci;. (2006). Modelos mentales y modelos numéricos: un estudio descriptivo en la enseñanza media. *Relime , 9* (1), 151-178.

Quintero Mejía, M. (2006). *Justificaciones de Jóvenes Univeristarios y jóvenes desplazados acerca de la concepción de justicia.* Recuperado el Septiembre de 2008, de www.umanizales.edu.co/ceanj/tesis/MarietaQuintero.pdf

Radford, L. (2009. Vol 9. Nº Extra 1). *Semiótica y educación Matemática.* Recuperado el Abril de 2009, de Dialnet: http://dialnet.unirioja.es/

Salazar De León, E. E. (Mayo de 2005). Análisis comparativo de los Conceptos Matemáticos Maya y Kaxlan. Nueva Guatemala de la Asunción, Guatemala C.A.

Sanmartí, Neus;. (2002). Un reto: mejorar la enseñanza de las ciencias. En C. R. Cátal M, *Las ciencias en las escuela* (págs. 13-26). Barcelona: Graó.

Segovia Alex, I., & Castro Martínez, E. (2009). La estimación en el cálculo y en la medida: fundamentación curricular e invesitgaciones desarrolladas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Univerisdad de Granada. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology. Nº 17, vol 7 (1)* , 499-536.

Tamayo Alzate, O. E. (Mayo de 2001). *Evolución conceptual desde una perspectiva multidimesnsional. Aplicación al concepto de respiración. Tesis Doctoral. Universidad Autonoma de Barcelona.* Recuperado el 2007, de http://dialnet.unirioja.es/

Tamayo Alzate, O. E., & Sanmartí, N. (Noviembre de 2002). *Estudio multidimensional de las repesentaciones mentales de los estudiantes. Aplicación al concpeto de respiración.* Recuperado el Junio de 2008, de Dialnet: http://dialnet.unirioja.es/

Tamayo Alzate, Oscar Eugenio. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Revista Educación y pedagogía.vol18, nº 45* , 39-49.

Vasco Uribe, C. E. (1987). *El enfoque de sistemas en el nuevo programa de matemáticas. En M.E.N: un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas , vol II.* Bogotá: Serie Pedagogía y Currículo.

## Anexos

Instrumento 1

Análisis de elementos conceptuales de la medida y el contexto

Entrevista semiestructurada

Antes de esta situación se presenta a los niños diferentes instrumentos para realizar la medición y objetos que pueden servir de unidad patrón.

1. Se realizarán preguntas relacionadas con los instrumentos de medida.

2. Antes de tomar la bolsa de tierra, obsérvala y dime ¿qué cantidad de tierra crees que hay en la bolsa?, ¿cómo sabes que hay esa cantidad de tierra? ¿cómo harías para comprobar que en realidad hay esa cantidad de tierra?
Ahora tienes los siguientes objetos: (vasijas, reglas, cuerdas, las manos, los pies, los brazos. Escoge alguno de ellos para saber la cantidad de tierra que hay en la bolsa ¿por qué escogiste ese objeto o esa parte del cuerpo?, o ¿cuál otro crees que te pueda servir?, ¿Te sirve el que escogiste para saber cuánta cantidad de tierra hay?

3. ¿Cabe la cantidad de arena que hay en la bolsa en ésta caja? , ¿Cuánta tierra cabe en la matera?, Qué sucedió?, ¿Qué crees que pasó?

4. Se realizará el recorrido de cierta distancia.

Explica cómo puedes registrar el tiempo que te demorarías en recorrer la distancia. ¿Por qué crees eso? Recuerda que al finalizar la competencia me debes responder cuánto te demoraste.

Ahora responda ¿Cuánto te demoraste en el recorrido? , compáralo con lo que estimaste inicialmente.

De los instrumentos observados (pesas, cintas métricas, reglas, balanza, cronómetros), di cual utilizarías para registrar el tiempo ¿por qué?

Instrumento 2

Exploración de los modelos explicativos

Estudiantes de formación complementaria

Analiza las siguientes situaciones donde se aplica el proceso de medida, señala si estás de acuerdo ( AD) o en desacuerdo ( DA) y sustenta tu argumento

1. La mama de Pablo está haciendo el almuerzo para la familia, y ella siempre corta la carne más grande para su esposo, porque, cuando ella vivía en su casa de soltera era una norma que se le diera la carne más grande al papá, así no hubiera carne sino para él y de igual forma ella lo hace en su familia. ¿Por qué?

   _____

   _____

   _____

2. En la institución ha llegado el paquete escolar para entregarlo a los estudiantes, pero éste año han decidido que sólo se dará paquete escolar a los estudiantes de escasos recursos económicos. Un estudiante apela ante este hecho, argumentando que, para todos debe ser igual, pues todos tienen un derecho que no se les puede vulnerar, la igualdad, ya que todos son iguales. ¿por qué?

   _____

   _____

   _____

3. Los estudiantes del Grado Once han decidió hacer una excursión para celebrar su último año juntos; para tal fin decidieron realizar algunas

actividades, para que al final del año no les toque dar mucho dinero. Han decidido repartir el dinero así: por ejemplo esta el caso de Yessenia, que es una estudiante cuyos padres tienen un muy buen nivel de ingresos y ella pudo colaborar mucho más con las actividades y en el caso de Karla cuyos padres tiene un nivel económico bajo, su colaboración fue escasa. Algunos del grupo han propuesto que se debe repartir de acuerdo con la cantidad de dinero aportada, es decir, el que aportó más recibe más dinero y el que aportó menos recibe menos dinero. ¿Por qué?

_____

_____

_____

4. Sara está ayudando a su madre a hacer la comida. La madre le pide que reparta las tajadas de plátano, pero que recuerde que las debe repartir más o menos igual, porque sino lo hace el demonio está viendo lo que ella hace, y si no es así, es posible que él haga que le suceda algo malo en la noche. ¿Por qué?

   _____

   _____

   _____

5. Tanía ha salido del colegio, en ese momento se encuentra con su novio, ella decide quedarse con él, charlando un rato. Luego llega a su casa y le dice a su mamá que estuvo ocupada con la profesora de matemáticas. Su mamá, le recuerda que es mejor decir la verdad, porque si no, el Dios de los Cielos, la castigará, y tendrá en cuenta la cantidad de mentiras y la gravedad de las mismas. ¿Por qué?

   _____

   _____

   _____

6. Don Gilberto es dueño de la tienda “el mejor Precio”. El es una persona muy cuidadosa con su clientela y para ello constantemente les recuerda

a sus empleados que no vayan a ser usureros con sus clientes, pues en el juicio final, Dios equilibrará la balanza, los actos buenos y los malos y sólo se quedará con el que menos actos injusto hayan hecho. ¿Por qué?

_____

_____

_____

7. Felipe, es un estudiante de séptimo grado, y explica a su padre que en la institución le han enseñado que medir significa asignar un número exacto a una característica medible del objeto y que como el mide el abono para fumigar el café es incorrecto, el recipiente que el utiliza para dicho proceso no es una medida exacta , ya que es una medida aproximada. ¿Por qué?

   _____

   _____

   _____

8. En un paseo escolar, se han unido 6 estudiantes para comprar una gaseosa de 1000 centímetros cúbicos. Cada estudiante ha llevado vasos de diferentes tamaños, y ellos deciden repartir la gaseosa en cantidades exactamente iguales, para ello llevan una vasija graduada en centímetro cúbicos. ¿por qué?

   _____

   _____

   _____

9. María hecha continuamente monedas a la alcancía y varias veces ha intentado destaparle para saber la cantidad de dinero que tiene, pero no lo hace, porque su madre le dice que si cuenta el dinero se le disminuirá la plata que hay en la alcancía. ¿por qué?

_____

_____

_____

10. En la familia de Pedro ha nacido un bebé. Los abuelos del bebé llegan a su casa a conocerlo y le explican a Pedro y a su esposa que ellos no pueden permitir que midan al niño, puesto que, si lo miden mucho el niño se quedará bajo de estatura. ¿Por qué?

    _____

    _____

    _____

Instrumento 3

Exploración de modelos explicativos

Estudiantes de formación complementaria

La siguiente  situación se ha propuesto a diferentes personas, para que decidan como resolverla. Escribe con quien estás de acuerdo y con quién no. Explica.

“En una familia, el papá ha dejado una herencia para repartir entre sus cinco hijos. Dos de ellos son de estrato alto, otros dos son estrato bajo y  otro de estrato medio.  Ellos deciden contar el dinero que dejó su padre y repartirlo entre todos por igual. Algunos parientes han estado colaborando en el proceso de sucesión y cada uno de ellos tiene su opinión acerca de la decisión tomada.

1. Lucía opina:

   Yo pienso, que la herencia no debe ser repartida entre los hijos, esta debe ser enterrada con él, para que su nueva vida  este colmado de abundancia y riqueza.

   Estoy de acuerdo

   No estoy de acuerdo

   ¿Por qué?

2. Jaime opina:

Sólo el Dios del cielo podrá juzgar si la repartición que hicieron está bien hecha, si no, deben prepararse para habitar las llamas del infierno, porque en el cielo no tendrán cabida.

Estoy de acuerdo

No estoy de acuerdo

¿Por qué?

3. Camila opina:
   De acuerdo con la ley, a cada uno le corresponde la misma cantidad de dinero y eso está bien.

   Estoy de acuerdo

   No estoy de acuerdo

   ¿Por qué?

4. Carmenza opina:
   Pues todos los hijos son iguales, entonces cada uno merece los mismo sin importar quien hubiese sido el mejor hijo.

   Estoy de acuerdo

   No estoy de acuerdo

   ¿Por qué?

5. Fernando opina:
   Jaime y Juliana (los hijos de nivel alto) debieron haber recibido más dinero, porque ellos siempre ayudaron a su papá y es el momento de que se les recompense por su ayuda.

   Estoy de acuerdo

No estoy de acuerdo

¿Por qué?

6. Juliana opina:

   Yo creo que el dinero se debió haber repartido de acuerdo a las necesidades económicas de cada hijo, así la ley dictara otra cosa.

   Estoy de acuerdo

   No estoy de acuerdo

   ¿Por qué?

Instrumento 2

Exploración de los modelos explicativos

Estudiantes de segundo grado

A continuación se hará lectura de una historia que vivieron unos niños de segundo en una escuela de Aranzazu.

Los niños de segundo grado de la escuela “Alegrías” realizaron una fiesta con el fin de recoger dinero para el salón, cada niño debía llevar $100, este dinero era ingresado a una alcancía. Durante la fiesta se dispuso de mucha comida. A la fiesta ha llegado Camila, una de las niñas del salón, en muchas ocasiones le ha tocado ingresar al salón de clase sin nada que comer y hoy era uno de esos días. La profesora la atiende inmediatamente y le ha servido un manjar delicioso, aunque en ese momento ningún niño había recibido su primera porción de comida y una de la reglas de la fiesta era que cada uno iba a recibir la misma cantidad de comida. Juan replicó por este hecho, y dijo que era necesario que a todos les dieran por igual, porque todos eran iguales sin importar que su compañera tuviera hambre... En ese momento interrumpe también Gregorio para decirle a la profesora que él había echado más dinero en la alcancía, y que entonces el merecía más comida que otros niños. En medio de tanto alboroto Cecilia explica que la regla que la profesora había propuesto era que todos iban a tratar de comer la misma cantidad, que la regla no era que quien diera más, comería mas, que ella estaba de acuerdo en que se cumplieran las reglas dadas, sin importar las condiciones como había llegado cada niño. En ese momento la mamá de uno de los niños les hace callar y les explica que si siguen reparando lo que hizo la profesora en darle más comida a la Camila, el diablo vendría por

ellos y se los llevaba. Los niños sintieron mucho temor por lo dicho por la madre y decidieron seguir disfrutando de la fiesta.

Al terminar propusieron abrir la alcancía, y Luisa propuso que no la abrieran hasta que estuviera llena, porque ella había escuchado a su mamá, que si uno contaba mucho la plata, el dinero se disminuye. Al ver esa explicación Marcos propone entonces que no se abra, entonces que como la alcancía era transparente, que diario midieran hasta donde llegaban las monedas, y que cuando estuviera llena la abrían, pero José otro amiguito del grupo, contó que de pronto a la alcancía le sucedía lo que a los bebés, que cuando los median mucho no crecían y que de pronto la plata de la alcancía no crecía. Al ver todos esas historias decidieron entonces no abrirla, porque de pronto les pasaba alguna cosa de esas.

Explica con quienes estás de acuerdo y con quienes no.

1. Juan
2. Gregorio
3. Cecilia
4. Mamá
5. Luisa
6. José

Instrumento 3

Exploración modelos explicativos

Estudiantes de segundo grado

Al pasar el tiempo la alcancía se llenó y la profesora les propuso que repartieran el dinero, algunos estudiantes propusieron lo siguiente

1. Manuel propuso que repartieran el dinero por igual para todos sin importar quien necesitaba más o quien menos.

Estoy de acuerdo

No estoy de acuerdo

¿Por qué?

2. Sofía propuso que ella había ayudado mucho a la profesora en la elaboración de la comida, entonces que ella merecía más dinero que otros compañeros.

Estoy de acuerdo

No estoy de acuerdo

¿Por qué?

3. Teresa dijo que ella creía que era necesario repartirlo de acuerdo con las necesidades económicas de cada niño.

Estoy de acuerdo

No estoy de acuerdo

¿Por qué?

Instrumento 4

Análisis de elementos conceptuales

Para este instrumento se utilizó la entrevista semiestructurada, las dos situaciones planteadas eran:

1. Repartición de unos objetos comestibles
2. Repartición de un líquido